ELEMENTI GENERALI
DELLE PRINCIPALI PARTI
D E L L E
MATEMATICHE,
NECESSARJ ANCORA ALL' ARTIGLIERIA, E ALL' ARTE MILITARE.

Del Signor Abate DEIDIER,

Professor Regio di Matematiche nelle Scuole d' Artiglieria DE LA FERE.

TRADUZIONE DAL FRANCESE
DI ARDUINO, E MATTEO DANDOLO
NOBILI VENETI.

TOMO SECONDO.

IN VENEZIA,
MDCCLXI.

APPRESSO MODESTO FENZO,
CON LICENZA DE' SUPERIORI, E PRIVILEGIO.

ELEMENTI DELLE PRINCIPALI PARTI DELLE MATEMATICHE.

CONTINUAZIONE DEL LIBRO SECONDO.

CAPITOLO OTTAVO.

Della Trigonometria, della Longimetria, e del Livellamento.

321. LA *Trigonometria* è la ſcienza, che fa conoſcere tutti i lati e gli angoli d'un triangolo mediante la cognizione d'alcune di queſte coſe.

322. S'oſſervi bene, che fra le coſe nòte eſſer vi dee almeno uno de' lati; poichè ho già dimoſtrato (*N.*101.), che due, o più triangoli eſſer poſſono equiangoli ſenza eſſere equilateri.

323. Dato un'angolo acuto ABC (*Fig.* 203.), il ſuo conſeguente ABE diceſi *Compimento* a due retti dell'angolo ABC, e l' angolo DBA, il quale manca all'angolo ABE per valere un retto, diceſi *Compimento* all'angolo ABC.

Convien porre attenzione a queſte due ſorte di compimenti, acciò non naſca qualche equivoco.

324. Essendo 'l vertice B dell'angolo ABC al centro d' un circolo, la perpendicolare AS, tirata dall'estremità A dell'uno de'suoi lati sopra l'altro BC, diceſi *ſeno retto*, o ſemplicemente *ſeno* dell' angolo ABC, o dell'arco AG; la parte SG, ſegata da queſta perpendicolare dalla banda della circonferenza, diceſi *ſeno verſo*; il lato BA, o BG diceſi *ſeno intero*, *ſeno tutto*, o *raggio* del circolo; la perpendicolare RC, alzata all' eſtremità C del raggio BC fino al concorſo del raggio BA prolungato, appellaſi *Tangente*, e la retta BR *Secante*.

325. Fa d' uopo diſtinguere la *Secante*, che adoperaſi nella Trigonometria, da quella, di cui s' è ragionato nel Capitolo ſeſto; poichè l' una non trapaſſa 'l centro del circolo, e l'altra ſega la circonferenza in due punti.

326. Se prolungaſi 'l ſeno AS d'un'angolo ABC, finchè ſeghi la circonferenza in T, la corda AT ſarà 'l doppio del ſeno AS; poichè la perpendicolare BG tirata dal centro la ſega per mezzo, e 'l ſuo arco ACT ſarà doppio dell'arco AC: così dovrà dirſi, che '*l ſeno* AS *d'un' angolo* ABC *è la metà della corda* AT, *che ſostiene un doppio arco*.

327. Quindi ne ſegue, 1°. ch' il ſeno dell' angolo ABE compimento a due retti dell'angolo ABC è lo ſteſſo ch' il ſeno dell' angolo ABC; imperocchè la corda AT ſostiene l' arco AET doppio dell'arco AE dell'angolo ABE, ed in conſeguenza la metà AS di detta corda è 'l ſeno dell'angolo ABE. 2°. Ch' il ſeno dell' angolo retto DBG è 'l raggio DB; poichè, eſſendo queſto ſeno prolungato, ei ſoſterrebbe la ſemicirconferenza, ch'è il doppio dell'arco DC abbracciato dall' angolo retto.

328. Giacchè il ſeno dell' angolo ABD compimento a un retto dell' angolo ABC ſi è la perpendicolare AN (*N.* 324.), parallela ed uguale a BS; egli è per ſe evidente, che ſe dal raggio BC levaſi 'l ſeno verſo SC dell' angolo ABC, il reſiduo BS, od AN ſarà il ſeno del compimento dell' angolo ABC.

329. Si ſono calcolati i ſeni, le tangenti e ſecanti di tutt' i gradi del qnarto di circolo e de' loro minuti con metodi aſſai ſemplici e facili, che trovanſi al principio d'ogni Trigonometria, e di cui inutil ſarebbe farne quì ragionamento. Ora, ſiccome impoſſibili rendeanſi queſti calcoli ſenza la Regola del Tre, che ſovente ci dà delle frazioni, o ſenza l'eſtrazione della radice quadra, la quale non ſi può ſempre fare con eſattezza; così s'è ſuppoſto 'l raggio diviſo in dieci milioni di parti, a fine di poter traſcurare le frazioni, od i

ra-

residui, i quali, minori essendo dell'unità, non possono equivaler giammai alla decima milionesima parte del raggio, che computar si può uguale a zero. Quindi, fatti i calcoli, si son disposti in colonne da un lato i seni, le tangenti e secanti da un grado fino a quarantacinque, aggiungendovi i seni, le tangenti e secanti de' minuti d'ognuno di essi gradi; e dall'altro si sono parimente posti in colonne i seni, le tangenti e secanti de' compimenti dei gradi da uno fino a quarantacinque, aggiungendovi eziandio i seni, le tangenti e secanti de' loro minuti; ciò che riesce di somma utilità, poichè sovente si ha bisogno de' compimenti.

Or convien notare, che quantunque le Misure, di cui ci serviamo per misurare un raggio, un seno, ec. sieno diverse da quelle, che si sono adoperate calcolando le Tavole de' seni, delle tangenti e secanti, ciò non ostante il lor rapporto è lo stesso. Supponiamo p. e. ch'essendo il raggio diviso in cento milioni di parti, siavi una tangente, la quale non contenga che cinquanta milioni, ed in conseguenza non sia che la metà del raggio; egli è manifesto, che dividendo 'l raggio e la tangente in piedi, o pollici, il numero de' piedi contenuti dalla tangente non sarà che la metà del numero de' piedi contenuti nel raggio. Così, quando le Tavole ci avran fatto conoscere il rapporto di due linee, dato 'l valore di una d'esse in pertiche, piedi, o pollici si troverà colla semplice regola del Tre il valore dell'altra parimente in pertiche, piedi, o pollici. Se p.e. la Tavola ci dà per la tangente cinque milioni, e ch'il raggio sia di dieci pertiche, io dirò: siccome dieci milioni valore del raggio, secondo le Tavole, è a cinque milioni valore della tangente, secondo le stesse Tavole, così 10 pertiche valore del raggio in pertiche è ad un quarto termine, che sarà in pertiche 'l valore della tangente; e questo quarto termine sarà cinque pertiche. Lo stesso dicasi negli altri casi.

330. PROPOSIZIONE LXXXVII. *In qualunque triangolo* ABC (Fig. 204.), *i lati sono fra loro come i seni degli angoli opposti ad essi lati.*

Poichè l'angolo ABC è alla circonferenza, ei vale la metà dell' arco ARC, ch'abbraccia: ma il lato AC opposto all'angolo ABC sostiene l'intero arco ARC, o 'l doppio dell'arco, che misura l'angolo ABC; dunque la metà del lato AC è 'l seno dell'angolo ABC. Per la stessa ragione, la metà del lato BC è 'l seno dell'angolo opposto A, e la metà del lato AB è 'l seno dell'angolo opposto C; ora, i lati AC, AB, BC sono fra loro come le lor

metà;

metà; dunque essi sono come i seni degli angoli ad essi opposti.

331. PROPOSIZIONE LXXXVIII. *In qualunque triangolo scaleno* ABC (Fig. 205.) , *la somma di due lati* AB , BC *è alla lor differenza, come la tangente della metà della somma de' due angoli* BAC, BCA, *formati sul terzo lato* AC, *è alla tangente della metà della differenza di questi stessi angoli.*

Preso per centro il vertice B, con un raggio uguale al lato BC, ch'è il maggiore de' due lati AB, BC, descrivo un circolo; dall' una e dall' altra parte prolungo fino alla circonferenza il lato minore AB, il che mi dà AD uguale alla somma AB + BC de' lati AB, BC, ed AE uguale alla differenza di detti due lati; l' angolo DBC esterno al triangolo ABC equivale alla somma de' due interni opposti BAC, BCA, e l' angolo alla circonferenza DEC, essendo la metà dell' angolo al centro DBC, vale per conseguente la metà della somma degli angoli BAC, BCA: ora, l' angolo BAC esterno al triangolo ACE vale i due interni opposti AEC, ACE; perciò la differenza dell' angolo BAC all' angolo AEC è 'l minore ACE: ma nel triangolo isoscele EBC, essendo BEC uguale a BCE, la differenza di BEC a BCA è altresì l' angolo minore ACE; onde l' angolo BAC superando l' angolo AEC del minore ACE, ed AEC superando parimente l' angolo BCA dell' angolo ACE, ne segue, che la differenza degli angoli BAC, BCA è 'l doppio dell' angolo ACE, e però che ACE è la metà della stessa differenza.

Facendo centro in E, colla retta EC presa per raggio descrivo un' arco CN, e tiro la tangente DC, che va a terminare all' estremità della retta ED, giacchè l' angolo retto ECD abbracciar dee una semicirconferenza; poi, facendo centro in C, colla stessa retta EC presa per raggio descrivo l' arco EI, e tiro la tangente EF: così, prendendo EC per raggio, l' arco NC è la misura dell' angolo DEC, e la retta DC è la sua tangente. Parimente, l' arco EI è la misura dell' angolo ECI, e la retta EF è la sua tangente: ora parallele essendo fra loro le tangenti DC, EF, poichè son perpendicolari sopra EC, l' angolo FED è uguale al suo alterno EDC: ma FAE è uguale all' angolo DAC, che gli è opposto; i due triangoli DAC, FAE son dunque simili, ed abbiamo DA. AE : : DC. EF; cioè la somma de' lati AB, BC è alla lor differenza AE, come la tangente DC della metà della somma degli angoli BAC, BCA è alla tangente EF della metà della differenza di detti due angoli.

332. PRO-

332. PROPOSIZIONE LXXXIX. *In qualunque triangolo scaleno* ABC (Fig. 206.), *il lato maggiore* AC *è alla somma* AB + BC *degli altri due, come la differenza di essi è alla differenza de' segmenti* AR, RC *del lato maggiore* AC *formati dalla perpendicolare* BR *tirata dall' angolo opposto.*

Facendo centro in B, col raggio BC descrivo 'l circolo CDSE, e prolungo il lato AB fino alla circonferenza in D : quindi io ho BD = BC = BS ; e però AB — SB, od AS è la differenza de' lati AB, BC, e AB + BD, o AD n'è la somma : così pure, a cagione della corda EC divisa per mezzo dalla perpendicolare BR, ho ER = RC, ed in conseguenza AR — ER, od AE è la differenza de' segmenti AR, RC : ora, le secanti AG, AD ci danno AC. AD : : AS. AE (*N.* 273.) ; dunque il lato maggiore AC è alla somma AD degli altri due, come la lor differenza AS è alla differenza AE de' segmenti AR, RC.

Della Risoluzione de' Triangoli Rettangoli.

333. PROBLEMA. *Data l' ipotenusa* AB *di 636 pertiche, e 'l lato* BG *di 386 trovare gli angoli* (Fig. 207.).

Retto essendo l' angolo ACB opposto all' ipotenusa, il suo seno è uguale al raggio, e secondo le Tavole vale 10000000 : ora, l' ipotenusa AB è al lato BG, come il seno dell' angolo retto ACB opposto all' ipotenusa è al seno dell' angolo CAB opposto al lato CB (*N.* 330.) ; io dico adunque per la Regola del Tre : *636* è a *386*, come 10000000 è ad un quarto termine, che per la regola stessa trovasi *6069175* ; e cercando questo numero nella colonna de' seni segnata nelle Tavole trovo, ch' egli appartiene all' angolo di 37 gradi, 22 minuti : così l' angolo CAB è di 37 gradi, 22 minuti. Ora quest' angolo sommato all' angolo CBA vale un retto, o *90* gradi ; dunque da *90* gradi levandone 37, più 22 minuti, il residuo 52 gradi, 38 minuti è 'l valore dell' angolo CBA.

334. AVVERTIMENTO. Per maggior brevità, dal raggio, dai seni, dalle tangenti e secanti levansi due caratteri a dritta, osservando, che se li due caratteri, i quali si tolgono, vaglion più di 50, s' aggiugne 1 all' ultimo carattere rimanente ; ed eccone la ragione.

Sia il seno *3786486* ; supponiamo prima, ch' ei sia *3786400*, mentre il suo raggio è 10000000 ; egli è evidente, che d' amendue le parti levando due zeri, è come se avessi diviso l' uno e l' altro

altro per 100; ed in conseguenza il rapporto del seno al raggio dopo la divisione è'l medesimo di prima. Ma se 'l seno è 3786486, e che dividasi 'l seno e'l raggio per 100, il quoziente del seno sarà 37864 con un residuo $\frac{86}{100}$, ch' è quasi uguale ad un' unità. Così, trascurando questo residuo, io trascuro quasi un'unità; e siccome il raggio diviso per 100 è 100000, l'unità trascurata è un cento millesimo del raggio, e quantunque questo cento millesimo sia di poco momento, ciò non ostante per maggior'esatezza egli è ben fatto aggiugnere un'unità al residuo del seno, e dire; che questo seno è 37865, e non 37864: per l'opposto, se i due ultimi caratteri, che levansi dal seno, sono inferiori al cinquanta, essi vagliono in tal caso meno d' una mezza unità di raggio, ovvero la metà d'un cento millesimo; e per conseguenza si può trascurar detto valore, senza che'l rapporto del raggio al seno sia sensibilmente alterato.

335. PROBLEMA. *Dato il lato* AC *di* 456 *pertiche, e l' angolo opposto* B *di* 33 *gradi*, 48 *minuti trovar l' ipotenusa* AB (Fig. 208.).

Dico: come il seno dell' angolo B, ch' è nelle Tavole 55630 levando due caratteri, è al seno dell'angolo retto C, ch'è 100000 levando altresì due caratteri; così 'l lato AC di 456 pertiche è ad un quarto termine, ch'è l'ipotenusa; e per la regola del Tre trovo, che quest' ipotenusa vale 820 pertiche.

336. PROBLEMA. *Dato il lato* AC *di* 456 *pertiche, e l' angolo* BAC *di* 56 *gradi*, 12 *minuti ritrovare il lato* BC *opposto a detto angolo* (Fig. 209.).

Facendo centro in A, con un' intervallo uguale al lato AC descrivo l'arco CD: così, prendendo AC per raggio, il lato CB è la tangente dell'angolo A; perciò, prendendo nelle Tavole il valore 149378 della tangente dell' angolo A, dico: il raggio AC di 100000, secondo le Tavole, è alla tangente CB di 149378, secondo le stesse Tavole, come lo stesso raggio AC di 456 pertiche è ad un quarto termine, che sarà'l valore in pertiche della tangente CB; e per la regola del Tre trovo 681 pel valore di CB.

337. PROBLEMA. *Dati i lati* AC, CB *conoscere gli angoli* (Fig. 210.).

Descrivo l'arco CD, ed in conseguenza CB è la tangente dell' angolo A, ed AC n'è 'l raggio; dico adunque: come il raggio AC in pertiche è alla tangente CB parimente in pertiche, così 'l raggio AC di 100000, secondo le Tavole, è ad un quarto termine,

mine, che sarà la tangente CB espressa in parti uguali a quelle del raggio; e cercando nelle Tavole questa tangente, troverò a quale angolo essa appartiene.

338. PROBLEMA. *Dat' i lati* AC, CB *conoscere l' ipotenusa* (Fig. 211.).

Per lo precedente Problema cerchisi l' angolo A; poi si troverà l' ipotenusa AB, come sopra (*N.* 335.).

Della Risoluzione de' Triangoli Obbliquangoli, o non Rettangoli.

339. PROBLEMA. *Dati due angoli* C, B (Fig. 212.) *e 'l lato* AB *opposto all' uno de' dati angoli* C *ritrovare gli altri due lati.*

Cerco nelle Tavole i seni degli angoli C e B, e dico: siccome 'l seno dell'angolo C opposto al lato noto AB è al seno dell' angolo B opposto al lato ignoto AC, così 'l lato AB è al lato AC; e con la regola del Tre trovo 'l valore di AC.

Dati gli angoli C e B, il terzo è altresì noto, essendo egli 'l compimento a due retti della somma degli angoli C e B; però io dico: il seno dell'angolo C opposto al lato noto AB è al seno dell' angolo A opposto al lato ignoto BC, come 'l lato AB è al lato, che si cerca, BC, ec.

340. PROBLEMA. *Dato 'l lato* AB (Fig. 213.) *di* 469 *pertiche, il lato* BC *di* 584, *e l' angolo contenuto* B *di* 68 *gradi ritrovare gli altri angoli, e 'l lato* AC.

Per la proposizione 85 (*N.* 331.), la somma de'lati AB, BC è alla lor differenza, come la tangente della metà della somma degli angoli A, C è alla tangente della metà della loro differenza. Unisco dunque insieme i due lati 469 e 584, e la somma sarà 1053; dal maggior levo 'l minore, e la differenza sarà 115. Ora, essendo i tre angoli pres' insieme di 180 gradi, se quindi levo l'angolo B = 68, il residuo 112 sarà la somma de' due; ne prendo la metà 56, e trovo nelle Tavole, che la tangente di 56 gradi è 148256; onde dico: la somma 1053 de'lati AB, BC è alla lor differenza 115, come la tangente 148256 della metà della somma degli angoli A, C è ad un quarto termine; e colla regola del Tre trovo 16196, ch'è la tangente di 9 gradi, 12 minuti: così io ho la tangente della metà della differenza degli angoli A, C: ora, la metà della somma delle due grandezze disuguali, più la metà

della lor differenza, è uguale alla maggiore, e la metà della somma, meno la metà della differenza, è uguale alla minore (*Libro primo*, *N*.200.) ; a 56 gradi aggiugnendone dunque 9, più 12 minuti, la somma 65 gradi, 12 minuti sarà 'l valore dell'angolo A opposto al maggiore de' due lati BC, e da 56 gradi levandone 9, più 12 minuti, il residuo 46 gradi, 48 minuti sarà 'l valore dell'angolo C opposto all'altro lato AB.

Ora, ritrovati in tal modo gli angoli, dico: il seno dell'angolo A è al lato CB oppostogli, come 'l seno dell'angolo B è al lato opposto AC.

341. PROBLEMA. *Dato 'l lato* AC (Fig. 213.) *di* 348 *pertiche*, *il lato* AB *di* 236, *e 'l lato* BC *di* 314 *conoscere gli angoli*.

Per la proposizione 86 (*N*. 332.), il lato maggiore AC è alla somma degli altri due AB, BC, come la differenza di questi è alla differenza de' segmenti AE, EC tagliati dalla perpendicolare tirata dall'angolo B sopra 'l lato maggiore AC: ora, la somma de' lati AB, BC è 550, e la lor differenza è 78. Dico dunque: il lato AC = 348 è alla somma AB + BC = 550, come la differenza 78 è ad un quarto termine; e per la Regola del Tre trovo 123 per la differenza de' segmenti AE, EC: ma la somma de' segmenti è 348; onde alla metà della differenza 123 aggiugnendo la metà di detta somma, la nuova somma $235\frac{1}{2}$ sarà il segmento maggiore EC, e dalla metà della somma levando la metà della differenza, il residuo $112\frac{1}{2}$ sarà il segmento minore.

Ciò fatto; avrò due triangoli rettangoli ABE, BEC, di cui m'è data l'ipotenusa coll'uno de' lati; così io troverò gli angoli di detti due triangoli nel modo accennato sopra (*N*.333.).

342. AVVERTIMENTO. Null'altro io soggiugnerò, a fin di lasciare a' Principianti 'l piacere di risolver da se stessi gli altri casi, che lor si possono presentare; ma mostreremo, che se in vece dei seni, delle tangenti, ec. e delle grandezze espresse in pertiche si pongono i loro logaritmi, molto si ristrignerà il calcolo, e la difficoltà dell'operazioni. Dimostriam ciò con un'esempio.

Sia il triangolo rettangolo ABC (*Fig*. 210.), di cui m'è noto l'angolo BAC di 56 gradi, 12 minuti, e'l lato AC di 456 pertiche. Se voglio ritrovar l'altro lato, debbo fare questa proporzione (*N*. 336.) : il raggio AC di 100000, secondo le Tavole, è alla tangente CB di 149348, secondo le stesse Tavole, come lo stesso raggio di 456 pertiche è ad un quarto termine; e colla

colla regola del Tre trovo 681 pertiche pel valore di CB. Ora per far ciò, debbo moltiplicare 149348 per 456, e dividere il prodotto per 100000, il che rende l'operazioni lunghe, e tediose.

Per isfuggire dunque quest'imbroglio, cerco il logaritmo del raggio, ch'è 100000000, e quello della tangente 149378, ch'è 101742873: trovansi questi logaritmi nelle Tavole di Mr. Ozanam a lato de' loro seni e delle lor tangenti, ciò che riesce di gran giovamento. Cerco altresì nella Tavola de' logaritmi de' numeri, la quale trovasi subito dopo le Tavole de' seni, il logaritmo 26589648 di 456: ora, quando l'operazioni si fanno col mezzo de' logaritmi, e'convien fare con l'addizione e la sottrazione, ciò che far si dovrebbe con la moltiplicazione e divisione (*Libro primo*, *N.* 344.); perciò unisco insieme i due ultimi logaritmi trovati, e la lor somma si è 128332521; quindi tolgo il logaritmo 100000000, e'l residuo si è il logaritmo 28332521, che cercato nelle Tavole de' Logaritmi appartiene al numero 681; ed in conseguenza il lato B, che si cercava, è di 681 pertiche; e così negli altri casi.

Della Longimetria.

343. La *Longimetria* è la scienza di misurare sul terreno le lunghezze, le altezze e profondità accessibili, od inaccessibili; si pongono per ciò in uso i triangoli, e misuransi gli angoli col mezzo di un Grafometro, il qual'è un semicircolo, su cui son segnati tutt' i gradi, e al cui centro evvi una regola, che gira d'intorno, corredata alle sue estremità di due *Pinule*, o lastre di rame fesse nel mezzo, a fin di poter con maggior sicurezza mirare un' oggetto: quest'istrumento è sì comune, ch'inutil sarebbe farne una più lunga descrizione.

344. Siccome ordinariamente misuransi le lunghezze sopra 'l terreno per poscia delinearle sulla carta, e poichè la carta è sempre più picciola del terreno, che rappresentar si vuole; così dobbiamo per necessità servirci d'una misura, la quale a proporzione sia minore di quella, che s'è adoperata per misurare; e ciò s' ottiene mediante una *Scala*, od una retta linea, che dividesi e suddividesi proporzionalmente alle divisioni e suddivisioni della misura, di cui ci siam serviti. Se l'estensione, che si vuol rappresentare è assai grande p. e. una vasta campagna, basterà dividere una linea in molte parti uguali, che rappresentino delle pertiche, e si tras-

cureranno i piedi, i pollici e le linee, perciocchè altrimenti non potrebbero queste suddivisioni esser sensibili sulla carta: ma se ciò, che si vuol misurare, non ha molta estensione, come sarebbe un piano di una casa, d'un giardino, ec. non s' avranno in tal caso a trascurare nè i piedi, nè i pollici, ec. anzi per maggior' esatezza si costruirà la scala, come insegneremo nel seguente Problema.

345. PROBLEMA. *Costruire una Scala, che rappresenti delle pertiche, de' piedi, de' pollici, e delle linee* (Fig. 214.).

Prendo una linea AB, ch'io divido in parti uguali, per esempio in 4, che rappresentino quattro pertiche; divido il quarto IIIB in *6* parti uguali, che rappresentino de' piedi, poichè la pertica contiene *6* piedi. Sopra AB costruisco un rettangolo ABEH, dandogli un' altezza AH ad arbitrio. Da ciascun punto di divisione della linea AB tiro delle parallele alla linea AH, e così operando, sopra la quarta pertica IIIB trovansi sei piccioli rettangoli fra loro uguali. Dal primo di detti rettangoli tiro la diagonale IIIR, e dividendo la sua altezza IIIN in dodici parti uguali, da' punti di divisione tiro delle parallele ad AB: così, essendo il triangolo IIINR segato da dodici basi parallele, egli è lo stesso, che se s' avessero dodici triangoli simili, i quali avessero i lor vertici al punto III, e per conseguente le lor basi proporzionali alle loro altezze: ora, l'altezze sono 1. 2. 3. 4, ec. fino a 12; onde la prima base dal lato del vertice è 1, la seconda 2, la terza 3, e così succesivamente fino all'ultima NR, ch'è dodici: ma NR vale un piede, e in conseguenza dodici pollici; dunque la prima base dal lato del vertice vale un pollice, la seconda ne vale due, la terza tre, ec.

Che se voglio rappresentar delle linee, prolungo HE in S, finchè ES sia della grandezza d'un pollice, cioè della grandezza della prima base de'dodici triangoli precedenti; e dal punto S tirando la retta SB, ho un'altro triangolo ESB, il quale prolungando le parallele ad AB si troverà segato da 12 altre basi parallele; e siccome un pollice vale 12 linee, così proveremo nel sopr'accennato modo, che la prima delle basi dal lato del vertice B vale una linea; che la seconda ne vale due, ec.

Se costruita questa scala voglio p. e. pigliare 2 pertiche, 3 piedi, 4 pollici; sovrappongo la punta del compasso al punto I della retta AB, e l'apro, finchè l'altra punta cada sul punto 5 segnato sopra la quarta pertica IIIB: quind'io avrò due pertiche, e tre piedi; porto 'l compasso così aperto in modo, che l' una delle sue

punte

punte cada ſul numero 4 ſegnato ſopra la linea IIIN, e l' altra ſopra qualche punto V della linea 4V; e fiſſando la punta in V apro il compaſſo, finchè l'altra punta cada in X, ed ho la grandezza VX, che vale 2 pertiche, 3 piedi, 4 pollici; e così dell'altre.

346. COROLLARIO. Quindi è facile comprendere, che col mezzo d'una Scala puoſſi ſulla carta rappreſentare qualſivoglia lunghezza ed eſtenſione di terreno, col ridurla in triangoli, e col traſportar poſcia i detti triangoli ſopra la carta.

Imperocchè ſupponiamo, ch' i lati d'un triangolo miſurato ſul terreno ſieno l'uno di due, il ſecondo di tre, e'l terzo di quattro pertiche: ſe ſopra la mia Scala prendo tre grandezze, di cui l'una equivaglia a due parti, o pertiche di detta Scala, l' altra a 3, e la terza a 4, e che con eſſi tre lati io deſcriva un triangolo, ei ſarà ſimile a quello del terreno; imperocchè i lati del triangolo miſurato ſopra'l terreno ſono fra loro come i lati del triangolo delineato ſulla carta, e così degli altri.

347. PROBLEMA. *Miſurare una lunghezza acceſſibile ſoltanto dall'una delle ſue eſtremità.*

Sia il muro ABCD (*Fig.* 215.) acceſſibile ſoltanto dalla banda di A; prendo ſopra'l terreno due punti, di cui l'uno R ſia in retta linea co'punti A, B del muro, e l'altro S ſia fuori del livellamento, e molto diſtante da R; pongo il Graſometro in S, tal che il piano dell'iſtrumento ſia orizzontale; traguardo in R, ove metto un baſtone, e quindi traguardando all'eſtremità del muro in M, ſcrivo il numero de' gradi compreſi da queſti due raggi viſuali. Paſſo in R miſurando la diſtanza SR, e ponendo il Graſometro in R traguardo in S ed M, e ſcrivo il numero de'gradi contenuti da' due raggi viſuali. Io ho dunque un triangolo, di cui m'è data la baſe RS e i due angoli ſopra la baſe; onde m' è noto ancora l'angolo al vertice, poichè egli è'l compimento de' due angoli ſopra la baſe; e per conſeguenza non ſi ha che dire: il ſeno dell'angolo B è al ſeno dell'angolo S, come la baſe RS è al lato RB; e ſe dato queſto lato, da eſſo levo la diſtanza RA, il reſiduo AB ſarà la lunghezza del muro, che ſi cercava.

Se voglio riſolvere il Problema ſenz'aver ricorſo alla Trigonometria, faccio una ſcala, e col ſuo mezzo traſporto ſopra la carta la baſe RS; poi con un picciolo ſemicircolo graduato faccio in R ed S gli angoli ritrovati ſul terreno, ciò che mi dà'l triangoletto *rbs* ſimile al triangolo RBS; da *rb* levo il valore *ra* di RA, e ſulla

mia

mia Scala portando il residuo *ab*, trovo 'l valore della lunghezza del muro.

Se non ho Grafometro, sul livellamento RS piglio una parte RZ di quattro, o cinque pertiche, ec. ed una parte SV uguale ad RZ: similmente sopra RB piglio RX = RZ, e sopra SB prendo ST = SV; misuro XZ ed VT, e per conseguenza conosco i lati de' due triangoli ZRX, VST. Sulla carta trasporto mediante la mia Scala la base RS; sopra *rs* prendo le parti *rz* ed *su*, ciascuna di quattro pertiche della Scala; poi con *rz*, e altre due linee *rx*, *zx*, ciascuna delle quali contiene tante pertiche della mia Scala, quante ne contengono sul terreno le rette RX, ZX, costruisco il triangolo *rzx*, che si trova simile al triangolo RZX; nello stesso modo faccio il triangolo *ust* simile al triangolo VST; e prolungando i lati *rx*, *st*, finattantochè si seghino in *b*, il triangolo *rbs* è simile al triangolo RBS, per essere gli angoli *r*, *s* uguali ciascuno a ciascuno agli angoli R, S: così da *rb* levando la retta *ra*, che contiene un' istesso numero di pertiche che RA, il residuo *ab* portato sopra la Scala ci dà 'l numero delle pertiche del muro AB.

Quest' ultimo metodo mi pare 'l più comodo, non solo perchè dispensa dal bisogno d' istrumenti; ma ancora perchè non occorre misurare gli angoli, ciò che non è sempre facile ad eseguirsi coll' ultima esatezza.

348. AVVERTIMENTO. Ho detto, che 'l piano del Grafometro esser dee orizzontale; imperocchè, siccome quest' istrumento è alzato su un bastone al disopra del terreno, egli è evidente, che se si traguardasse al piede del muro, i raggi visuali sarebbon più lunghi delle distanze SB, RB, e che gli angoli cangerebbero; quindi è, che se si dovesse necessariamente traguardare in B, come quando si ha per oggetto di misurare una lunghezza senz' l altezza, sul livellamento del raggio visuale si sarebbon porre alcuni palli, o bastoni, poi rimettendo l' istrumento nella sua posizione orizzontale traguarderebbesi secondo questo e secondo 'l livellamento RS per misurare l' angolo formato in S; e lo stesso far si dovrebbe in R. Conviene a ciò riflettere, perchè altrimenti egli sarà facile prender qualche sbaglio.

349. PROBLEMA. *Misurare una lunghezza* AB *affatto inaccessibile* (Fig. 216.).

Sul terreno piglio una base RS; da S traguardando in R, A, B, misuro gli angoli RSA, ASB; e da R traguardando in S, B, A, misuro gli angoli SRB, BRA: così nel triangolo RAS, dati gli

an-

angoli sopra la base, e la base RS, conoscerò agevolmente mediante la Trigonometria i lati RA, AS, come ancora i lati RB, SB del triangolo RBS; e per conseguenza, noti essendo nel triangolo ARB i lati AR, RB non meno che l'angolo contenuto ARB, egli sarà altresì facile a conoscere la base AB (*N.* 340.).

Senza Trigonometria, sopra la carta trasporto la base RS, e gli angoli ARS, BRS, BSR, ASB, il che mi dà i triangoli ARS, BRS simili a quei del terreno; poi tirando la linea AB, mediante la mia scala ne conosco il valore.

Senza istrumento, sopra RS trasportato sulla carta fàccio de' triangoli ARS, BRS simili a' triangoli, che son sul terreno, servendomi del terzo metodo accennato sopra (*N.* 347.); e trovo AB come prima.

350. PROBLEMA. *Misurare un' altezza accessibile, od inaccessibile* (Fig. 217.).

Nella campagna prendo un punto R, e ponendo il Grafometro in una situazione perpendicolare all'orizzonte, tal che il suo diametro sia orizzontale, pel diametro traguardo in M, e girando la regola traguardo al vertice B, e misuro l' angolo BHM. Posto dunque, ch'avvicinarmi possa all' altezza AB, ho un triangolo rettangolo HMB, in cui m'è noto il lato HM e l'angolo acuto BHM, ed in conseguenza anche l'altro HBM; donde agevol sia conoscere il lato BM (*N.* 336.), a cui aggiugnendo l'altezza HR, od MA dell' istrumento, avrò 'l valore di BA.

Senza Grafometro, pianto un bastone TS fra R ed A in distanza di tre, o quattro pertiche, e traguardando orizzontalmente in M e poi in B, osservo i punti N, S, ove i raggi visuali segano il palo TS, e misuro NS; mediante la scala porto HM sopra una carta; prendo su detta linea una parte uguale alla distanza RT od HN, e in N alzo la perpendicolare NS uguale al valore trovato sopra 'l bastone; quindi tiro HSB, che sega la perpendicolare MB in B, e portando MB sopra la scala, ritrovo 'l suo valore, a cui aggiugnendo il valore di MA, ho l'intera altezza AB.

Se 'l piede dell'altezza AB è inaccessibile, piglio un' altro punto Z, il quale sia in diritto coi punti A, R, e terminate in R le già dette operazioni, porto il Grafometro in Z, e traguardando in M e quindi in B, misuro l' angolo BTM, e la base FH: ora, essendo l'angolo FHB compimento a due retti dell' angolo BHM, egli è altresì noto; onde nel triangolo BFH, la cui base ed i cui due angoli sopra la base son dati, agevol riuscirà conosce-
re

re il lato BH; e dato questo, insieme coll'angolo acuto BHM, si potrà conoscere ancora il lato BM, ec.

Noi possiamo servirci del sopr'accennato terzo metodo sì per questo, che per i precedenti casi.

351. PROBLEMA. *Tirare una linea parallela ad una linea inaccessibile* AB (Fig. 218.).

Cerco la lunghezza AB come sopra (*N.* 349.); e in R facendo l'angolo VRO uguale all'angolo RAB, ch'io conosco mediante il triangolo RAB, la linea RO è la parallela ricercata, mercè che gli angoli VRO, RAB dalla medesima parte sono uguali.

Senza istrumento, sulla carta trasporto la base RS, ed i triangoli RAS, RBS; quindi tiro la retta AB, e da R la retta RO parallela ad AB: sopra RO ed RS prendo le parti RY, RT fra loro uguali, e ciascuna di quattro, o cinque pertiche, e col mezzo della Scala misuro la retta TY. Sul terreno piglio la parte RT di quattro pertiche, e mettendo un bastone in R ed un'altro in T, a cui attacco delle cordicelle, faccio la cordicella RY di quattro pertiche, e la cordicella TY uguale al numero delle pertiche trovate pel valore di TY; tendo le due cordicelle, finchè le loro estremità si tocchino in Y, e'l triangolo RYT è simile al triangolo RYT sopra la carta: così, parallela essendo RY ad AB, la stessa RY sul terreno sarà altresì parallela ad AB.

352. PROBLEMA. *Levare il piano d' una gran Campagna* (Fig. 219.).

Prendo una base AB, da cui osservo molti punti, come C, D, E, H, ec. in cui dove traguardo per l'estremità A, B della base: così egli m'è facile conoscere le distanze CD, DE, HG, GF di tutti i punti, che sono a dritta o a sinistra della base, e le loro distanze all'estremità della stessa; e quid'io avrò le posizioni di tutti questi punti.

Quanto al punto L, ch'è in diritto colla base AB, piglio un' altra base AM, e dalle sue estremità A, M traguardo ne'punti C, L; ed in conseguenza io conoscerò come sopra le rette LC, LM, ec. il che mi darà la posizione del punto L; e lo stesso farei, se dal lato di B si ritrovasse un punto, che fosse in retta linea con AB; ciò è così chiaro, che basta indicarne le tracce.

353. PROBLEMA. *Levare il piano d'un luogo chiuso, in cui non sia possibile entrarvi* (Fig. 220.).

Misuro il lato AB, e prolungandolo poscia in R, misuro l'angolo esteriore RBC e'l lato BC; ciò che mi dà la posizione de'

due

due lati AB, BC. Prolungo BC in S, e misuro l'angolo SCD e'l lato CD; il che mi dà la posizione CD; e termino il rimanente nello stesso modo.

Siccome il muro BC potrebbe impedire, che si prendesse l'angolo RBC col Grafometro, così è necessario sul prolungamento BRN prendere un punto R, da cui si tirerà una retta RH parallela a BC, e si misurerà l'angolo NRH uguale all'angolo RBC; e così in altri casi simili.

Senza istrumento, sopra'l prolungamento BR e'l lato BC prendo le parti BP, BM del valore di quattro, o cinque pertiche in circa; misuro la retta MP, e'l tutto trasportando sopra la carta, col mezzo della scala ho la posizione de'due lati AB, BC; e lo stesso s'operi ancora rispetto agli altri due.

354. PROBLEMA. *Levare il piano d'un luogo, fuori del quale non sia possibile uscire, e nel cui mezzo non si possa penetrare* (Fig. 221.).

Misuro i lati EA, AB e l'angolo contenuto A, e'l tutto trasportando sulla carta, ho la posizione de'due lati EA, AB; e così degli altri.

Del Livellamento.

355. Una retta linea dicesi *a Livello*, quando tutt'i suoi punti son'equidistanti dal centro della terra; e siccome la figura della Terra molto s'accosta alla Sferica, così ne segue, ch'una linea a livello è una circolare.

356. Se sulla superficie della terra piantasi a piombo un bastone AO (*Fig.* 222.), alla cui estremità mettasi un cannocchiale, od una regola 1, 5, che li sia perpendicolare, e che veggasi a traverso il cannocchiale, o per le sue pinule poste all'estremità della regola, un'oggetto distante D, il raggio visuale AD sarà tangente della linea a livello AC, e tanto più s'allontanerà, quanto sarà più lungo; tuttavolta siccome questa linea AD ci pare orizzontale, così dicesi linea a *Livello apparente*, e prendesi ancora per la linea a vero livello AB, quando la sua lunghezza AD non eccede 100, o 110 pertiche; poichè grandissima essendo la superficie della terra rispetto a 100, o 110 pertiche, l'innalzamento BD del punto D del livello apparente sopra B è insensibile: ma quando AD diventa più lunga, la differenza BD comincierà a farsi sensibile; e però ella deesi necessariamente correggere, come mostreremo in progresso.

357. Il livello, che comunemente s'adopra, quando trattasi d' una distanza di 100, o 110 pertiche, si è'l *livello d'acqua*; egli è composto d'una canna di ferro bianco ABCD (*Fig.* 223.) incurvata alle sue estremità, a ciascuna di cui ponesi una picciola canna di vetro. Nel mezzo O evvi un'altra canna di ferro bianco, che l' è perpendicolare, ed in cui s'incastra un bastone, che piantasi a piombo sul terreno. Se vogliamo adoprar quest'istrumento, e'riempiesi d'acqua, e allora la superficie d'acqua RS, che apparisce a traverso la canna di vetro posta in A, mettesi a livello colla superficie d'acqua TX, che apparisce in D: l'esperienza c'insegna, ch'i liquidi, i quali agiscono liberamente, si mettono sempre a livello; così, se da R si traguarda in X, il raggio visuale R avrà i suoi termini R, X a livello, e se traguardas' in Z, la linea RZ sarà una linea a livello apparente.

358. Gli altri livelli, di cui possiamo servirci per le distanze, che son maggiori di 100, o 110 pertiche, in questo solo differiscono; ch'a fine di vedere gli oggetti più distintamente in vece d' acqua s' adoprano de'vetri di cannocchiale: se ne trovano le descrizioni nel Trattato di Livellamento di Mr. *Picard* dato alla luce da Mr. *de la Hire*, e'n quello di Mr. *Bullet*.

359. Il Livellamento dicesi semplice, quando può farsi con un sol colpo di livello; e composto, quando per giugnere al desiderato fine son necessarj più colpi.

360. PROBLEMA. *Dati sul terreno due punti* A, B (Fig. 224.) *ritrovare, se sieno a livello, o quale dei due sia più distante dal centro della terra, e di quanto.*

Supponiamo, che la distanza AB non ecceda le 100, o 110 pertiche: pongo il livello in A, e mando in B un' uomo, a cui do una doppia pertica, ch'egli dee porre a piombo in B, ed un cartone, sul quale vi sia una gran linea tinta di nero; e li comando, che faccia scorrer questo cartone lungo la doppia pertica, in modo che detta linea sia sempre perpendicolare alla pertica. Traguardo per le superficie R, S dell'acqua, e quando m'accorgo, che la linea nera del cartone passa per l'estremità T del raggio visuale RST, faccio segno all'uomo, che m'ajuta, di fermarsi, acciò misuri l'altezza TB, ed io nel tempo stesso misuro l'altezza VA del raggio visuale: ordino allo stesso di ritornare; e se l'altezza TB da esso ritrovata equivale alla mia AV, i due punti A, B sono a livello; imperocchè equidistanti essendo dal centro della terra i due punti V, T, se da queste due distanze uguali levo le

parti

parti uguali VA, TB, i punti A, B saranno altresì equidistanti dallo stesso centro: che se l'altezza TB è minore dell'altezza VA, da VA levo TB, e'l residuo HA fa conoscere, ch'il punto A è più vicino al centro della terra di quello sia 'l punto B dalla quantità HA; e quindi scorgesi agevolmente cosa far si dovrebbe, se *TB* fosse maggiore di VA.

Se la distanza AB (*Fig.* 225.) eccede le 100, ma non le 200 pertiche, divido questa distanza in due parti uguali AC, CB, e ponendo il livello in C, da R traguardo pel punto S al punto T; traguardo poscia da S per H, e se ritrovo uguali le due altezze AH, BT, i punti A, B saranno a livello: ma se l'una è maggior dell'altra, dalla maggiore levo la minore, e'l residuo mi fa conoscere, quanto l'uno de' punti sia più elevato dell'altro, e quanto sia più distante dal centro della terra.

Che se la distanza AM eccede le 200 pertiche, la divido in parti uguali, ciascuna di cui non superi le 100, per esempio in tre AC, CB, BM; poi mettendo il livello in C, livello i due punti A, B; e quindi ponendo il livello in B, innalzo i due punti B, M; e così in altri casi.

361. AVVERTIMENTO. Questo metodo è assai buono per omettere il calcolo, che far necessariamente conviene, quando trattasi di corregger l'errore de' colpi di livello troppo estesi; ma siccome egli ci obbliga a moltiplicare le operazioni, mostreremo in qual maniera si facciano correzioni, di cui abbiamo già parlato.

362. PROBLEMA. *Corregger gli errori di Livello apparente.*

Supponiamo, ch' il circolo ADI (*Fig.* 226.) rappresenti la superficie della terra, e che la distanza AD dei due punti A, D da livellarsi sia di 500 pertiche; il livello apparente AB sarà la tangente, e la retta BOI tirata dal centro sarà la secante; così noi avremo BD . BA : : BA . BI (*N.* 271.): ora, picciolissima essendo la parte DB della secante rispetto 'l diametro DT della terra, non si può trascurarla; ed in conseguenza DB . BA : : BA . DI; dal che io deduco $DB \times DI = \overline{BA}^2$, e $DB = \frac{\overline{BA}^2}{DI}$, cioè se dividiamo 'l quadrato della distanza AB pel diametro della terra, il quoziente sarà l' innalzamento del livello apparente al di sopra del vero.

Ora, secondo M^r^. *Picard* e M^r^. *de la Hire*, il diametro della Terra è di 653894 pertiche; onde, facendo il quadrato 250000

della diſtanza BA = 500 pertiche e dividendolo per 653894, ritrovo 2 pollici, 9 linee per l' innalzamento BD : così, dopo aver livellato col metodo ordinario, debbo ſottrarre 2 pollici, 9 linee dall' altezza, ch' io trovo dalla banda di B, quando traguardo da A in B.

363. AVVERTIMENTO. Quantunque queſto metodo non paja, egli è tuttavolta eſattiſſimo ; imperocchè, ſe al quadrato di AB s' aggiugne quello di AO, queſti due quadrati preſi inſieme ſaranno uguali al quadrato dell' ipotenuſa BO ; ed eſtraendo la radice quadra, s' avrà 'l valore di BO, da cui levando DO = AO, troveremo in effetto, che 'l valore di BD è 2 pollici, 9 linee, come ſopra.

364. COROLLARIO. *Gl' innalzamenti* BD, EH, ec. *di differenti punti* B, E *del livello apparente ſono come i quadrati delle lor diſtanze* AB, AE, ec. *al punto* A, *in cui ſi fa 'l livellamento.*

Noi abbiamo $BD = \frac{\overline{AB}^2}{DI}$ (*N.* 362.), e per la ſteſſa ragione $EH = \frac{\overline{AE}^2}{DI}$; e però $BD . EH : : \frac{\overline{AB}^2}{DI} . \frac{\overline{AE}^2}{DI}$: Ora, diviſi eſſendo gli ultimi due termini dalla ſteſſa grandezza DI, ſono tra loro, come ſe non foſſero ſtati diviſi ; dunque $BD . EH : : \overline{AB}^2 . \overline{AE}^2$.

365. COROLLARIO II. *Dato dunque l' innalzamento* BD *d' un punto* B *di livello apparente, egli è altresì facile conoſcere gl' innalzamenti di tutti gli altri punti* E, ec. *di quel livello, di cui ſon date le diſtanze* AE, ec.

Poichè baſta dire per la Regola del Tre : ſiccome il quadrato di AB è al quadro di AE, così 'l dato innalzamento BD è ad un quarto termine, che ſarà l' innalzamento cercato EH ; e lo ſteſſo ſi dica in altri caſi.

Mr. *Picard* ha in queſto modo calcolato gl' innalzamenti de' punti di livello apparente al di ſopra del vero dalla diſtanza delle 50, fino a quella delle 4000 pertiche.

Ta-

Tavola degl' Innalzamenti del Livello apparente.

Distanze.	*Innalzamenti.*	*Distanze.*	*Innalzamenti.*
Pertiche.	*Piedi. Pollici. Linee.*	*Pertiche.*	*Piedi. Pollici. Linee.*
50	0.... 0.... $\frac{1}{3}$	750	0.....6... 3
100	0....0....1$\frac{1}{3}$	800	0.....7... 1
150	0....0....3	850	0.....7...11$\frac{1}{2}$
200	0....0....5$\frac{1}{3}$	900	0.....8....11
250	0....0....8$\frac{1}{3}$	950	0...10.... 0
300	0....1....0	1000	0...11.....0
350	0.... 1....4$\frac{1}{3}$	1250	1.....5.....2$\frac{1}{2}$
400	0....1....9$\frac{1}{3}$	1500	2.....0.....9
450	0....2....3	1750	2.....9.....8$\frac{1}{2}$
500	0....2....9	2000	3.....8.....0
550	0....3....6	2500	5.....8.....9
600	0....4....0	3000	8.....3.....0
650	0....4....8	3500	11.....2.....9
700	0....5....4	4000	14.....8.....0

366. PROBLEMA. *Livellare due termini, di cui non sia data la distanza.*

Metto il livello in A (*Fig.* 227.), e traguardo in B; trasporto poscia 'l livello in B, e traguardo in A. Misuro l' altezze CA, SB; d' amendue le parti levo l'altezza AR, o BT dell'istrumento, e se uguali sono i residui CR, ST, dico; ch' i punti A, B sono a livello, mercè che l' innalzamento del livello apparente, quando da A traguardo in B, è lo stesso dell' innalzamento, quando da B traguardo in A; onde i punti C, S esser debbono ugualmente lontani dal centro della terra; ed in conseguenza, a motivo di CA = SB, debbono altresì esser equidistanti i punti A, B.

Se disuguali sono i residui ST, CR (*Fig.* 228.), dal maggiore ST levo il minor CR, e la metà del residuo denota di quanto 'l punto A eccede 'l livello del punto B; imperocchè supponiamo, che A si trovasse in un punto F, il quale fosse a livello col punto

punto B; il livello, in vece d'esser' in R, sarebbe in X, e le altezze LT, CX sarebbono uguali: ora, venendo ad innalzarsi il punto A, s'innalza parimente il livello da X in R, il che fa accrescere l'altezza LT della quantità LS; e dall'altro lato, l'altezza CX diminuisce d'una quantità uguale ad LS: così CR = LT — LS; dall' altezza ST levando dunque l'altezza CR, o LT — LS, il residuo ST — LT + LS equivale a 2LS, o a due volte l'altezza SL, od AF del punto A al di sopra del punto F; onde la metà di questo residuo si è l'altezza AF.

Nè dicasi, che l'altezza AF, od RX non equivale all' altezza SL, perchè parallele non sono le linee RF, SB, andando esse a terminare al centro della terra; imperocchè grandissima essendo la distanza de'punti F, B al centro della terra rispetto alle linee RF, SB e alla loro distanza FB, ch'è altresì picciolissima rispetto alla circonferenza della terra, le due linee FR SB possono passar per parallele; la qual cosa rende le parti RX, SL sensibilmente uguali.

Finalmente, se da una parte ritrovo l'altezza SB (*Fig.* 229.) maggiore dell'altezza BT, e dall' altra l'altezza AX minore dell' altezza AR dello stesso livello; al difetto RX aggiugno l' eccesso ST, e la metà della somma si è l'altezza del punto A al di sopra del livello del punto B; poichè supponiamo, ch' il punto A s'abbassi in F, ove sia a livello con B; il livello, in vece d'essere in R, discenderà in V, ed uguali saranno l'altezze HT, XV. Ora, ascendendo 'l livello in R, l' altezza HT accresce d' una parte SH uguale ad AF; e 'l punto X, in vece d' essere al di sopra del livello, come lo era prima, trovasi al di sotto, tal che la parte XV, di cui eccedeva 'l livello, aggiunta alla parte RX, di cui n' è superato, sono insieme uguali ad SH; dunque RX = SH — HT, e per conseguenza, aggiugnendo ST od SH + HT ad RX, o SH — HT, la somma 2SH è'l doppio di SH, o dell'altezza AF del punto A la di sopra del punto B.

Quest' è un metodo eccellente per livellare certi termini, di cui troppo imbarazzante riuscirebbe trovar la distanza.

367. PROBLEMA. *Livellare due termini* A, R (Fig. 230), *fra cui trovansi e altezze, e discese.*

Do più colpi di livello ascendendo da A in S, poi discendendo da S in X; quindi da X ascendendo in Z, e finalmente di nuovo da Z discendendo in R faccio una colonna di tutte le altezze ritrovate ascendendo da A in S e da X in Z, ed un' altra dell' altezze ritrovate discendendo da S in X, e da Z in R; facendo dap-

poi

poi le somme di ciascuna d'esse dalla maggior levo la minore, e'l residuo denota l'altezza del punto A al di sopra del punto R; ciò che non ha bisogno di dimostrazione.

CAPITOLO NONO.

Della Planimetria, o Misura delle Superficie piane, e del lor rapporto fra esse.

368. NOI chiameremo *Elementi* d'una superficie piana le linee infinitamente prossime, di cui si concepisce esser questa composta; qualunque linea CR (*Fig.* 231.), che taglierà perpendicolarmente ciascun' Elemento, sarà la retta, ch' esprimerà la loro moltitudine, o la somma delle lor grossezze, o la totale grossezza loro.

369. PROPOSIZIONE LXXXIX. *I parallelogrammi* ABCD, EBCF (Fig. 232.), *che hanno la stessa base* BC, *e che sono infra due parallele* AF, BH, *sono tra loro uguali.*

A cagione de' parallelogrammi, abbiamo AB = DC, BE = CF, e AD = EF; a questi due ultimi aggiugnendo dunque la parte DE avremo AE = DF; onde, poichè i due triangoli AEB, DCF hanno i tre lati uguali ciascuno a ciascuno (*N.* 100.), d'amendue le parti levo il triangoletto DOE, ed ho ADOB = OEFC; e all'una e all'altra parte aggiugnendo il triangoletto BOC trovo ABCD = EBCF; dunque ec.

370 COROLLARIO I°. *I parallelogrammi* ABCD, EMHF, *che sono fra due parallele* AF, BH, *e che hanno le basi uguali* BC, HM, *sono uguali*.

Tiro le rette BE, CF; alle due rette uguali AD, EF aggiugno la parte comune DE, ed ho AE = DF e AB = DC: ora, l'angolo EAB = FDC; dunque i triangoli EAB, FDC, avendo i lati EA, AB uguali ciascuno a ciascuno a' lati ED, DC, e l'angolo compreso uguale all'angolo compreso, son perfettamente uguali, e l'angolo AEB equivale all'angolo DFC: così, essendo le rette BE, CF uguali ed ugualmente inclinate fra le parallele AF, BH, sono tra lor parallele, ed in conseguenza EBCF è un parallelogrammo: ora EBCF = ABCD (*N. 369.*), e per la stessa ragione EBCF = EMHF; dunque ABCD = EMHF.

371. COROLLARIO II. *Qualsivoglia parallelogrammo* EBCF *è uguale*

è uguale al prodotto della sua base BC *moltiplicata per la sua altezza, o per la perpendicolare* ER *tirata dal vertice sopra la base.*

Supponiamo, che 'l parallelogrammo ABCD sia rettangolo; il prodotto della base BC moltiplicata per l'altezza AB sarà 'l valore di questo rettangolo: ora, il parallelogrammo EBCF equivale al rettangolo; onde il parallelogrammo EBCF è altresì 'l prodotto della base BC per ER, o per la sua uguale AB.

372. COROLLARIO III. *I parallelogrammi* BEFC, MEFH, *che han le basi e l'altezze uguali, son' uguali.*

Ciascuno d' essi è uguale ad un rettangolo BADC, ch' abbia la stessa base ed altezza di loro, o che avendo la base uguale alla base sia fra le medesime parallele; dunque ec.

373. COROLLARIO IV. *I parallelogrammi, che hanno le basi disuguali e l'altezze uguali, sono fra lor come le basi; quei, che hanno l'altezze disuguali e le basi uguali, sono fra loro come le lor' altezze, e quei, che hanno l' altezze reciproche alle lor basi, sono uguali fra loro.*

Supponiamo, che la base BC del parallelogrammo BADC sia maggiore della base MH del parallelogrammo EMHF, e che uguali sieno l'altezze AB, ER; il parallelogrammo BADC sarà dunque il prodotto della sua base BC per la sua altezza BA, e 'l parallelogrammo MEFH sarà altresì 'l prodotto della base MH per l' altezza ER, o per la sua uguale BA: ma egli ci è noto, che se due grandeze disuguali BC, MH son moltiplicate per una medesima grandezza BA, i prodotti sono fra lor come le grandezze disuguali BC, MH; però i due parallelogrammi sono fra loro come le lor basi disuguali BG, MH.

Se supponiamo, che uguali sieno le basi BC, MH, e disuguali le loro altezze BA, ER, si mostrerà nello stesso modo, ch' i due parallelogrammi sono fra essi come le lor' altezze.

Finalmente, se l'altezze son reciproche alle basi, mostreremo come sopra (*N.* 184.), che i parallelogrammi sono uguali.

374. COROLLARIO V. *I triangoli* ABC, AEC (Fig. 233.), *che hanno la stessa base e che sono fra due parallele, son' uguali.*

Tiro CR parallela ad AB, e CH parallela ad AE, il che ci dà i due parallelogrammi uguali ABRC, AEHC (*N.369.*): ma essendo BC, la diagonale del parallelogrammo ABRC, il triangolo ABC n'è la metà; e per questa stessa ragione il triangolo AEC è la metà del parallelogrammo AEHC; questi due triangoli son dunque uguali, perocchè le metà sono fra loro come il lor tutto.

375. CO-

375. COROLLARIO VI. *Qualsivoglia triangolo è uguale al prodotto della sua base moltiplicato per la metà della sua altezza.*

Poichè, qualunque triangolo è la metà d'un parallelogrammo d'ugual base ed altezza: ma, il parallelogrammo è 'l prodotto della sua base per la sua altezza; onde il triangolo è 'l prodotto della base per la metà della sua altezza.

376. COROLLARIO VII. *Dunque* 1°. *I triangoli, che hanno basi uguali, e che sono fra l' istesse parallele, o che hanno altezze uguali, sono uguali.* 2°. *Quei, che han basi disuguali ed altezze uguali, sono fra loro come le lor basi.* 3°. *Quei, che hanno altezze disuguali, sono tra loro come le loro altezze.* 4°. *Quei, che hanno l' altezze reciproche alle basi, sono uguali.*

Ciò chiaro apparisce, a motivo ch' i triangoli sono metà de' parallelogrammi, che hanno ugual base ed altezza de' medesimi.

377. COROLLARIO VIII. *Qualsivoglia poligono regolare* EFCGH (Fig. 234.) *è uguale ad un triangolo* ABC, *la cui base* BC *equivale al circuito del poligono, e l' altezza* AB *al cateto, od apotema* OR.

Supponiamo, ch' il poligono sia un pentagono; dal centro O tiro de' raggi a tutti gli angoli, ciò che lo divide in cinque triangoli d' ugual base ed altezza: ora, il triangolo OHG è uguale alla sua base HG moltiplicata per la metà della sua altezza OR (*N.* 375.); onde il pentagono equivale a 5HG moltiplicato per $\frac{1}{2}$OR: ma il triangolo ABC è uguale a BC moltiplicato per $\frac{1}{2}$AB (*N.* 375.), e per ipotesi abbiamo BG $=$ 5HG, ed AB $=$ OR; il triangolo ABC è dunque uguale al poligono.

378. COROLLARIO IX. *Qualsivoglia circolo è uguale ad un triangolo, che abbia per base una linea uguale alla circonferenza, e per altezza una linea uguale al raggio.*

Il circolo è un poligono d' infiniti lati, il cui perimetro è la circonferenza, e'l cui apotema non differisce dal raggio, poichè i lati sono infinitamente prossimi alla circonferenza. Dunque ec.

Ovvero in altro modo: Sia 'l circolo BQM (*Fig.* 235.), il cui raggio è OB; concepisco, che dal medesimo centro O, e da tutt' i punti infinitamente prossimi al raggio descritte sieno delle circonferenze CRS, DHN, ec. che saranno gli elementi del circolo, talmente che la lor somma non differirà dal circolo stesso.

Da B alzo la perpendicolare BA, ch' io concepisco uguale alla circonferenza BQM. Dal punto A tiro al centro la retta AO, e da tutt' i punti di divisione concepisco delle rette CF, DG pa-

rallele alla retta BA, e che vadano a terminare sopra AO; simili essendo i circoli BQM, CRS (*N.* 287.), abbiamo BQM, CRS : : OB, OC, e a cagione de' triangoli simili OBA, OCF, abbiamo altresì BA. CF : : OB. OC; dunque BQM. CRS : : BA. CF: ma per ipotesi BQM = BA; onde CRS = CF; e si proverà eziandio, che la circonferenza DHN equivale alla retta DG; donde ne segue, che tutti gli elementi DG, CF, BA del triangolo OBA sono uguali ciascuno a ciascuno a tutti gli elementi del circolo BQM, e ch'in conseguenza questo circolo è uguale al triangolo OBA, il quale ha per base la retta BA uguale alla circonferenza, e per altezza il raggio OB.

379. COROLLARIO. *Dunque tutt' i circoli di differenti raggi, quali sono* BQM, CRS, DHN, *ec. si posson cangiare in triangoli simili* OBA, OCF, ODG, ec.

380. COROLLARIO XI. *Qualsivoglia corona, cioè qualsivoglia spazio compreso fra due circonferenze* BQM, CRS *concentriche e disuguali, è uguale ad un trapezoide* BCFA, *i cui lati paralleli e disuguali* BA, CF *sono uguali ciascuno a ciascuno alle due circonferenze, e di cui l'altezza* CB *è la differenza de' raggi* OB, OC.

Altro non è la corona che 'l circolo BQM, meno il circolo CRS: ora, il circolo BQM equivale al triangolo OBA, e 'l circolo CRS al triangolo OCF; la corona è dunque uguale al triangolo OBA, meno il triangolo OCF, cioè al trapezoide BCFA.

381. AVVERTIMENTO. Da tutto ciò ch'abbiam detto sembra risultarne, che trovar si possa la quadratura del circolo, cioè una figura rettilinea eguale al circolo: ma la difficoltà consiste nel rinvenire una retta eguale alla circonferenza; ed egli è appunto ciò, a cui non v'è apparenza, che giugner si possa.

Siccome i lati de' poligoni iscritti e circonscritti al circolo tanto più s'avvicinano alla circonferenza, quanto è maggiore il lor numero; egli è evidente, che a forza d' iscrivere e circonscrivere poligoni simili, se ne troverebber' alla fine due, i cui lati confonderebbonsi colla circonferenza, ma perchè si dovrebbero a quest' oggetto fare infiniti calcoli, ciò che non è possibile, *Archimede* non ha avanzato il suo che fino a' poligoni iscritto e circonscritto di *96* lati, ed ha ritrovato, che 'l diametro era al circuito del poligono circonscritto, come 1 a $3\frac{1}{7}$, o come 7 a 22, e che lo stesso diametro era al circuito del poligono iscritto, come 1 a $3\frac{10}{71}$, o come 7 a $21\frac{70}{71}$; di modo che riducendo 'l diametro 7, e i due circuiti 22 e $21\frac{70}{71}$ al medesimo denominatore 71, il che ci dà $\frac{497}{71}$ pel diametro,

metro, e $\frac{1562}{71}$, $\frac{1561}{71}$ per i due circuiti, la differenza de' due circuiti è uno, cioè una parte del diametro diviso in 497 parti, o $\frac{1}{457}$ del diametro. Ora, siccome la circonferenza del circolo molto più s' avvicina al circuito del poligono circonscritto ch' a quello dell' iscritto, egli è manifesto, che la differenza della circonferenza del circolo al circuito del poligono circonscritto esser dee minore della metà della 497ª. a parte del diametro, cioè minore della 494ª. parte del diametro; e perciò stimiam bene servirci piuttosto del rapporto di 7 a 227 per esprimere il rapporto del diametro del circolo alla sua circonferenza, di quello sia del rapporto di 7 a $21\frac{70}{71}$; tuttavolta, quantunque giustissimo sia in pratica il rapporto di 7 a 22, i Geometri, i quali si vantano di somma esatezza, adopran per ordinario de' numeri maggiori a fine di diminuire la differenza: ma 'l più comodo a mio giudizio si è 'l rapporto di 1000 a 3141, perchè nelle Regole del Tre, che convien fare, il numero 1000 risparmia talvolta una moltiplicazione, e talora una divisione.

382. PROBLEMA. *Trovar l' area d' un circolo, di cui sia dato il raggio* OB (Fig. 235.).

Sia 'l raggio OB di 3 pertiche; il diametro ne conterrà *6*: così per la Regola del Tre io dico: 1000 è a 3141, come *6* è ad un quarto termine, il qual sarà la circonferenza, che moltiplicata per la metà del raggio darà l' area del triangolo OBA uguale alla superficie del circolo.

383. COROLLARIO Iº. Se data la circonferenza del circolo si cercasse 'l raggio, per quindi ritrovare la superficie del circolo, mediante la Regola del Tre si direbbe: 3141 è a 1000, come la data circonferenza è ad un quarto termine, che sarebbe 'l diametro della stessa; e conseguentemente la metà di questo diametro sarebbe il raggio cercato.

384. COROLLARIO II. *Qualunque settore* ABC (Fig. 2*36*.) *è uguale al prodotto del suo arco* AC *moltiplicato per la metà del raggio* AB.

Essendo il circolo ARC un poligono regolare d' infiniti lati, egli è composto d' una infinità di triangoli, ciascuno de' quali ha per altezza il raggio, e di cui la somma delle basi equivale alla circonferenza; per la medesima ragione il settore ABC è composto d' un' infinità di triangoletti, i quali hanno parimente per altezza il raggio AB, e la cui somma delle basi è uguale all' arco RC: ma la somma de' triangoli, che compongono il circolo, equivale alla somma totale delle basi, o alla circonferenza moltiplicata

per la metà del raggio; onde la somma de' triangoli, che compongono il settore, è uguale alla somma totale delle basi, cioè all'arco AC moltiplicato per la metà del raggio.

385. COROLLARIO III. *L'area d'un segmento* ASC *è uguale al settore* ABCS, *meno il triangolo* ABC. Il ch'è per se manifesto.

386. PROBLEMA. *Misurare un Trapezoide* ABCD (Fig. 237.)

Unisco insieme le due basi AD, BC, e moltiplicando la lor somma per la metà dell'altezza, o della perpendicolare AB, tirata fra le due basi, il prodotto si è'l valore del trapezoide; il che io dimostro nel seguente modo.

Divido per mezzo in O l'uno de' lati non paralleli DC, e dal punto A tiro per O la retta AR, che sega BC prolungato in R.

Poichè i triangoli ADO, OCR hanno l'angolo AOD uguale all'angolo COR, che gli è opposto al vertice, l'angolo ADO uguale al suo alterno OCR, e'l lato DO uguale al lato OC, sono perfettamente uguali (*N.* 100.), e'l lato AD equivale al lato CR; ad amendue le parti aggiugnendo dunque la parte comune AOCB, avremo il trapezoide ADCB uguale al triangolo ABR: ma il triangolo ABR è uguale al prodotto della sua base BR, o BC + AD moltiplicata per $\frac{1}{2}$AB (*N.* 375.); onde il trapezoide è uguale allo stesso prodotto.

Ovvero divido per mezzo in R, S (*Fig.* 238.) ciascuno de' lati non paralleli AB, DC, e tirando la retta RS, che sarà parallela da AD, o BC, la moltiplico per l'altezza AB, il che ci dà'l valore del trapezoide; ed ecco come lo provo.

Dal punto S tiro FE perpendicolare a BC, e che concorra in AD prolungato in E; perocchè i triangoli DSE, CSF hanno l'angolo DSE uguale all'angolo CSF, che gli è opposto al vertice, l'angolo EDS uguale al suo alterno FCS, e'l lato DS uguale al lato SC, sono perfettamente uguali. Onde, a ciascuno di essi aggiugnendo la parte comune ADSFB, avremo il rettangolo AEBF uguale al trapezoide ABCD: ma il rettangolo equivale al prodotto di BF, od RS per l'altezza AB; dunque 'l trapezoide è uguale allo stesso prodotto.

387. PROBLEMA. *Misurare una fascia a rigiri* ABCDEFG (Fig. 239.).

Sego per mezzo ciascuna delle rette AH, BH, CF, DE, e da' punti di divisione tiro la linea ORST, la quale moltiplicata per la larghezza AH della fascia ce ne dà la superficie; poichè il trapezoide ABGH equivale al prodotto di OR moltiplicato per AH (*N.* 386.),

(*N.* 386.), il trapezoide BCFG è uguale ad RS × AH, e'l trapezoide CDEF equivale ad ST × AH: ma questi trapezoidi compongono la fascia; ond' essa equivale ad OR × AH + RS × AH + RS × AH + ST × AH, od ORST × AH.

388. COROLLARIO. Uguale essendo una corona ABCDEFGN (*Fig.* 340.) al trapezoide EART, le cui basi parallele AR, ET sono uguali ciascuna a ciascuna alle due circonferenze, e la cui altezza si è la differenza AE de' due raggi; egli è evidente, che se dal centro O, e dal punto H, che divide per mezzo AE, descrivesi una circonferenza, la corona sarà uguale a detta circonferenza moltiplicata per AE; imperocchè essa circonferenza sarà uguale alla retta HS, che sega per mezzo i lati non paralleli AE, RT del trapezoide, ec.

389. PROBLEMA. *Misurare una figura irregolare* ABDEG (Fig. 241.).

Dall' uno degli angoli C tiro delle rette agli angoli opposti, il che divide la figura in triangoli; misuro ciascuno di essi, e la lor somma ci dà 'l valore della figura.

390. PROPOSIZIONE XC. *I Rettangoli, i Parallelogrami ed i Triangoli sono in ragion composta della ragione delle loro altezze, e di quella delle lor basi.*

Sieno, come nella Figura 242, due rettangoli, di cui l' altezza dell' uno sia *a*, la base *b*, l' altezza dell' altro *c*, e la base *d*: paragono l' altezza del primo a quella del secondo, e la base alla base, il che mi dà le due Ragioni *a*, *c*; *b*, *d*: faccio la ragione composta di queste due, ed ho *ab*, *cd*. Ora il primo termine *ab* di questa ragione, essendo 'l prodotto dell' altezza del primo rettangolo per la sua base, è uguale a detto rettangolo; e per la stessa ragione il secondo termine *cd* è uguale al secondo: i due rettangoli sono dunque in ragion composta della ragione delle loro altezze, e di quella delle lor basi.

Uguali essendo i parallelogrammi a' rettangoli d' ugual base ed altezza, sono parimente in ragion composta della ragione delle loro altezze, e di quella delle lor basi. Lo stesso dicasi de' triangoli, poichè essi sono metà de' rettangoli d' ugual base ed altezza.

391. PROBLEMA. *Sopra un dato lato* ab *costruire una Figura simile a una data* ABCDE (Fig 243.).

Dall' uno degli angoli A della Figura tiro delle rette AC, AD agli angoli opposti: all' estremità *a*, *b* della data retta *ab* faccio gli angoli *cab*, *cba* uguali ciascuno a ciascuno agli angoli CAB, CBA;

CBA; ed in conseguenza il triangolo *cab* è simile al triangolo CAB: all' estremità *a*, *c* della retta *ac* formo gli angoli *dac*, *dca* uguali ciascuno a ciascuno agli angoli DAC, DCA, e'l triangolo *dac* è altresì simile al triangolo DAC. Finalmente, all' estremità *a*, *d* della retta *ad* faccio gli angoli *ead*, *eda* uguali ciascuno a ciascuno agli angoli EAD, EDA, e'l triangolo *ead* è simile al triangolo EAD: così, composte essendo le Figure *abcde*, ABCDE d'egual numero di triangoli simili ciascuno a ciascuno, sono simili fra loro (*N.* 164.).

392. PROPOSIZIONE XCI. *Le Figure simili sono fra loro come i quadri de' loro lati omologhi, o delle linee similmente poste.*

Sieno, come nella Figura 244, due rettangoli simili, tal che s' abbia *a*. *b* : : *c*. *d*; faccio i quadri *aa* dell'altezza *a* del primo e *cc* dell'altezza *c* del secondo. Ora, avendo il quadrato *aa* la medesima altezza del primo rettangolo *ab*, queste due Figure sono fra loro come le lor basi *a*, *b* (*N.* 373.); onde *aa*, *ab* : : *a*, *b*. Per la stessa ragione abbiamo *cc*. *cd* : : *c*. *d*: ma le ragioni *a*, *b*, e *c*, *d* sono uguali a motivo de' rettangoli simili *ab*, *cd*; dunque le ragioni *aa*, *ab*, e *cc*, *cd* sono altresì uguali; e però noi abbiamo *aa*. *ab* : : *cc*. *cd*, ovvero *aa*. *cc* : : *ab*. *cd*; dal che scorgesi, ch'i rettangoli *ab*, *cd* sono fra loro come i quadri *aa*, *cc* de'loro lati omologhi *a*, e *c*.

Ora, per la somiglianza delle Figure *ab*, *cd*, abbiamo *a*. *c* : : *b*. *d*; dunque *aa*. *cc* : : *bb*. *dd*: ma i due rettangoli sono fra loro come i quadri *aa*, *cc* delle lor' altezze; onde essi sono pure come i quadrati *bb*, *dd* delle lor basi. Nello stesso modo si proverà, che gli stessi sono come i quadri delle linee similmente poste, mercè che elle son fra loro come le basi, o come l'altezze (*N.* 165.).

I parallelogrammi simili essendo uguali a' rettangoli d' ugual base ed altezza, sono fra lor come i quadri de' loro lati omologhi, o delle linee similmente poste. Lo stesso dicasi de' triangoli simili, poichè essi sono metà de' rettangoli d'ugual base ed altezza.

Quanto a' Poligoni simili regolari od irregolari, egli è evidente, ch' essendo queste Figure composte d' uno stesso numero di triangoli simili ciascuno a ciascuno, saran tutti questi triangoli fra loro come i quadrati delle lor basi, ec. P. e. nella Fig. 243 i triangoli ABC, *abc* saranno fra loro come i quadri delle lor basi BC, *bc*: così pure i triangoli ACD, *acd* saran tra loro come i quadri delle lor basi CD, *cd*, o come i quadri delle basi BC, *bc*, a cagione di BC. *bc* : : CD, *cd*, e così successivamente; ed in conseguenza le

le Figure faranno altresì fra loro come i quadrati di BC, *bc*, o di CD, *cd*. ec.

Finalmente, giacchè i Circoli son de' poligoni, essi sono fra lor come i quadrati de' loro diametri, ec.

393. PROPOSIZIONE XCII. *Se tre linee* a, b, c (Fig. 245.), *sono in proporzione continua, il quadrato della prima è a quel della seconda, come la prima alla terza.*

Facciо'l rettangolo *ab* della prima per la seconda, e v'aggiugno il quadro *aa* della prima. Faccio altresì il rettangolo *bc* della seconda per la terza, e v' aggiugno il quadrato *bb* della seconda. Poichè il quadro *aa* e 'l rettangolo *ab* hanno uguale altezza, essi sono fra loro come le lor basi *a*, e *b*; onde *aa*. *ab* : : *a*. *b*, e per la medesima ragione *bb*. *bc* : : *b*. *c*: ma per ipotesi le ragioni *a*, *b*, e *b*, *c* sono uguali; dunque *aa*. *ab* : : *bb*. *bc*, ovvero *aa*. *bb* : : *ab*. *bc*; e perchè i rettangoli *ab*, *bc* hanno una comun dimensione *b*, sono tra loro come le lor dimensioni disuguali *a*, *c*; e però *ab*. *bc* : : *a*. *c*, ed in conseguenza *aa*. *bb* : : *a*. *c*; il che fa comprendere, che 'l quadrato della prima linea *a* è a quel della seconda, come la prima alla terza.

394. AVVERTIMENTO. Avrei potuto dimostrare queste proposizioni come ho fatto nell' Algebra; ma mi sono servito d'altro metodo per far vedere, che dedur si possono le verità Geometriche dai più semplici principj di questa scienza in un modo ancora più naturale dell' Algebraico.

395. PROPOSIZIONE XCIII. *Se sopra i tre lati d'un triangolo rettangolo* ABC (Fig. 246.) *si costruiscono tre Figure simili, la Figura* AHLC *fatta sopra l' ipotenusa* AC *è uguale all' altre due* ADEB, BFGC *fatte sopra gli altri due lati* AB, BC.

Simili essendo le tre Figure, esse son fra loro come i quadri de' loro lati omologhi AC, AB, BC: ma il quadro di AC è uguale a' quadri degli altri due lati AB, BC (*N.* 171.); dunque la Figura AHLC è uguale all'altre due.

396. COROLLARIO I°. *Se sopra i tre lati* AC, AB, BC (Fig. 247.) *del triangolo rettangolo* ABC *si descrivono de' semicircoli* AEBRC, AHB, BSC, *il triangolo* ABC *è uguale alle due porzioni di circoli* AHBE, BSRC, *che Lunette comunemente s' appellano.*

Simili essendo i semicircoli, essi sono fra loro come i quadrati de' lor diametri (*N.* 392.), ed in conseguenza il semicircolo AEBRC è uguale agli altri due; e d'amendue le parti levando i seg-

ſegmenti comuni AEB, BRC, reſta il triangolo ABC uguale alle due Lunette.

397. COROLLARIO II. *Se 'l triangolo rettangolo* ABG (Fig. 248.) *è iſoſcele, qualſivoglia Lunetta è uguale alla metà del triangolo* ABC; *cioè, dal vertice* B *abbaſſando la perpendicolare* BT, *la Lunetta* AHBE *equivale al triangolo* ABT, *e la Lunetta* BSCR *al triangolo* BTC.

I due ſemicircoli AHB, BSC ſono uguali, a cagione de' diametri uguali AB, BC, ed i ſegmenti AEB, BRC ſono altresì uguali, a motivo delle corde uguali AB, BC: dai due ſemicircoletti levando dunque i due ſegmenti, le due Lunette rimanenti ſaranno uguali. Ora queſte due Lunette equivagliono al triangolo ABC; onde ciaſcuna d' eſſe vale la metà di detto triangolo.

398. AVVERTIMENTO. Nel ſolo caſo, in cui 'l triangolo rettangolo ABC è iſoſcele, ſi può in particolar rinvenire 'l valore di qualſivoglia Lunetta; ed allora l' una o l' altra di eſſe appellaſi Lunetta d' *Ipocrate* celebre Matematico, che fioriva nel tempo de' Greci, e che fu 'l primo a ritrovarne la quadratura: ora in queſta Lunetta conviene oſſervare, ch' il quarto di circolo BTCR equivale al ſemicircolo BSC; imperocchè, uguale eſſendo il triangolo BTC alla Lunetta BSCR, ſe dall' una e dall' altra parte s' aggiugne il ſegmento BRC, s' avrà 'l quarto di circolo BTCR uguale al ſemicircolo BSC. E quindi il rinomatiſſimo Ingleſe Mr. Wiſthon ha ritrovato il modo di dividere la Lunetta d' Ipocrate in quante ſi voglia parti, come moſtreremo nel ſeguente Problema.

399. PROBLEMA. *Dividere la Lunetta d' Ipocrate* BSCR *in quante ſi voglia parti* (Fig. 249.).

Dal centro T del quarto di circolo tiro pel centro O del ſemicircolo la retta TS, che divide la Lunetta in due parti BSR, RSC: così, poſto che s' abbia a dividerla in quattro parti uguali, divido in quattro egualmente il diametro BC, e da' punti di diviſione alzo delle perpendicolari MP, ZY; quindi da' punti P, Y tirando le rette PT, YT, che ſegan la circonferenza del quarto di circolo in H, V, dico, che le parti della Lunetta SRHP, SRVY ne ſono ciaſcuna il quarto; ciò che io dimoſtro in queſto modo.

Tiro le rette OP, TM, e a cagione delle parallele PM, ST i triangoli PMO, PMT, che hanno la ſteſſa baſe PM, e che trovanſi fra due parallele, ſono uguali (*N.*374.); poi dall' una e dall' altra parte levo la parte comune PXM, e reſta il triangolo POX uguale al triangolo MXT.

Nel

Nel triangolo isoscele POT, uguale essendo l'angolo esteriore POS ai due interni opposti, egli è in conseguenza doppio dell'angolo OTP: ora, perchè il quarto di circolo BTCR è uguale al semicircolo BSC, ne segue, che l'intero circolo del raggio BT è doppio dell'intero circolo del raggio OB, e che per conseguenza il settore SOP del semicircolo è uguale al settore RTH del quarto di circolo, a motivo dell'angolo SOP doppio dell'angolo RTH. Da questi due settori levando dunque la parte comune ORL, il residuo SRLP equivale al residuo LOTH; e ad amendue le parti aggiugnendo PLH, ho SRHP uguale al triangolo POT, o ai due triangoli POX, OXT. Finalmente, in vece del triangolo POX, ponendo il triangolo XMT, che gli è uguale, abbiamo SRHP uguale al triangolo OTM: ma poichè il triangolo OMT ha la medesima altezza OT del triangolo BTC, egli non è ch'il quarto di detto triangolo, mercè che la sua base OM è 'l quarto della base BC (*N. 376.*); onde la parte SRHP equivale al quarto del triangolo PTC, o al quarto della Lunetta BSCR uguale al triangolo BTC.

400. PROBLEMA. *Ritrovare un quadrato uguale a più quadri dati, od una Figura simile ed uguale a più Figure simili* (Fig. 250.).

Supponiamo, che le rette AB, BC sieno i lati de'due primi quadri dati; con esse formo un'angolo retto ABC, e tirando la retta AC ho 'l triangolo rettangolo ABC, in cui 'l quadrato di AC equivale a'quadri degli altri due lati AB, BC (*N.* 171.); prendo il lato CD del terzo quadro dato, e con esso ed AC formando un'angolo retto ACD tiro la retta AD, il che mi dà un'altro triangolo rettangolo ACD, in cui 'l quadrato di AD è uguale a'quadri di AC, e DC: ma quello di AC equivale a'quadri di AB, BC; dunque 'l quadrato di AD è uguale ai tre primi quadri dati: e continuando nello stesso modo, troverò 'l quadrato di AE uguale ai quattro primi quadri dati; onde, facendo il quadrato di AE. s'avrà ciò che si cerca, e così degli altri.

Che se si ricercasse una Figura simile ed uguale a più Figure simili, porrei invece delle rette AB, BC, CD, DE, ed i lati omologhi di queste Figure; dopo di che la Figura simile fatta sopra AE sarebbe uguale alle quattro Figure date, ec. mercè che le Figure simili sono fra lor come i quadri de'loro lati omologhi.

401. PROPOSIZIONE XCIV. *Se in un circolo* (Fig. 251.) *tiransi due diametri* AC, BD, *che fra loro formino un'angolo acu-*

to, e che da' loro termini A, B *tirinfi delle tangenti* AV, BR, *che vadano a terminare ai diametri, e che fi feghino in* H; *dico*, 1°. *che i triangoli* AVO, BRO, *formati dai due diametri con ciafcuna delle tangenti, fono uguali*. 2°. *Che i triangoli* AHR, BHV, *formati dalle tangenti con ciafcun diametro, fono altresì uguali*.

Per effere le tangenti perpendicolari ai diametri ne' punti A, B, i triangoli AVO, BRO fono rettangoli; e per effere l'angolo acuto O comune, e'l lato AO uguale al lato BO, quefti due triangoli fon' uguali (*N.* 100.). Ciò che doveafi 1°. dimoftrare.

Da' due triangoli uguali AVO, BRO levando dunque il comun trapezoide AHBO, il refiduo VHB è uguale al refiduo RHA. Ciò che doveafi 2°. dimoftrare.

402. COROLLARIO. *Se dall' eftremità* A, B *de' diametri tiranfi delle perpendicolari* AX, BF *fopra i diametri oppofti, il triangolo* AVX, *formato fra i diametri dall' una delle perpendicolari* AX *e dalla tangente* AV *tirata dal medefimo punto* A, *è uguale al trapezoide* AXBR *fatto fra i diametri dalla fteffa perpendicolare* AX, *e dall' altra tangente* BR.

Per la precedente propofizione, il triangolo VHB equivale al triangolo AHR; dunque, a ciafcuno d' effi aggiugnendo il comun trapezoide AHBX, s' avrà AVX = BRAX.

403. PROPOSIZIONE XCV. *Pofto che dati fieno i due diametri* AC, BD (Fig. 252.) *colle lor tangenti* AV, BR, *fe da qualfivoglia punto* S *prefo fopra la circonferenza tiranfi infra i diametri due rette* LZ, MT *parallele alle tangenti* AV, BR, *il triangolo* LST, *formato da quefte due parallele coll' uno de' diametri* DB *prolungato in* V, *equivale al trapezoide* BRMT *formato dalla tangente* BR *di effo diametro* DBV *e dalla fua parallela* MT; *e'l triangolo* MSZ, *formato dalle fteffe parallele coll' altro diametro* CAR, *è uguale al trapezoide* AVLZ *formato dalla tangente* AV *di quefto diametro, e dalla fua parallela*.

Dal punto A tiro AX perpendicolare a DB, ed ho AVX = BRAX (*N.* 402.). Ora, per la perpendicolare AX parallela alla tangente RB e alla fua parallela MT, e per LZ parallela ad AV, i triangoli VAX, LST fon fimili, e fono fra lor come i quadri de' loro lati omologhi (*N.* 392.); onde VAX . LST : : $\overline{AX}^2$. $\overline{ST}^2$. Ma per la proprietà del circolo abbiamo $\overline{AX}^2 = \overline{BO}^2 - \overline{XO}^2$ (*N.* 284.), ed $\overline{ST}^2 = \overline{BO}^2 - \overline{TO}^2$; dunque VAX . LST : :

: .: $\overline{BO}^2 - \overline{XO}^2 . \overline{BO}^2 - \overline{TO}^2$: ora, simili essendo i triangoli BRO, TMO, XAO, sono fra lor come i quadri $\overline{BO}^2$, $\overline{TO}^2$, $\overline{XO}^2$ de' loro lati omologhi BO, TO, XO (*N.*393.) ; dunque, invece de' quadrati ponendo i triangoli, avremo VAX. LST :: BRO — XAO. BRO — TMO, ovvero VAX. LST .: : BRAX. BRMT: ma l' antecedente VAX equivale all'antecedente BRAX; onde 'l conseguente LST equivale al conseguente BRMT; e lo stesso si proverà ogni qual volta la parallela ST segherà 'l diametro BD infra'l centro O, e 'l punto B.

Ma se 'l punto Q, da cui tiransi le rette QL, QE parallele alle tangenti AV, BR, è talmente posto, che la parallela QE seghi 'l diametro BD al di sotto di O; all'estremità D tiro la tangente DF, che seghi RC prolungato in F, e siccome il triangolo LQP, formato dalle due parallele col diametro BD, è ancora simile al triangolo VAX, ho parimente VAX. LQP :: $\overline{AX}^2 . \overline{QP}^2 :: \overline{BO}^2 - \overline{XO}^2 . \overline{OD}^2 - \overline{OP}^2$, e in vece de' quadrati ponendo i triangoli BRO, AXO, ODF, OPE, che sono fra loro come questi quadri, avremo VAX . LQP .: : BRO — AXO . ODF — OPE, cioè VAX . LQP : : BRAX . DFEP : ma VAX = BRAX ; dunque LQP = DFEP : così 'l triangolo LQP, formato col diametro BD dalle parallele QL, QE tirate dal punto Q, è sempre uguale al trapezoide DFEP formato da queste stesse parallele colla tangente DF; e lo stesso avverrebbe ancora, se 'l punto, da cui tiransi le parallele alle tangenti, fosse preso sopra la semicirconferenza BCD. Il che dovea 1°. dimostrarsi.

Ora a fin di provare, ch'il triangolo MSZ, formato coll' altro diametro AC dalle parallele LZ, MT, è uguale al trapezoide AVLZ fatto dalla tangente AV di esso diametro e dalla sua parallela LZ, basterebbe, che dal vertice B dell' altro diametro tirassi una perpendicolare B3 sopra AC, e che terminassi'l rimanente come sopra: ma siccome non riuscirebbe questa dimostrazione per rapporto alle Sezioni Coniche, eccone un' altra comune ad esse, ed al Circolo.

Noi abbiamo VAX = BRAX (*N.* 402.) ; e da VAX levando il triangolo LST, e da BRAX il trapezoide BRMT uguale al triangolo LST, come s' è veduto, avremo AVLSTX = MTXA; poi levando la parte comune STX2, avremo AVL2

= MS2A; e ad amendue le parti aggiugnendo il triangolo A2Z, s'avrà finalmente AVLZ = MSZ.

Se 'l punto Q, da cui son tirate le parallele QL, QE alle tangenti, è talmente posto, che la parallela sia al di sotto del centro O, dal punto D tiro una tangente KDF, che seghi AC prolungato in F, e la tangente AV prolungata in K; i triangoli rettangoli BRO, DOF son simili ed uguali, a cagione di BO = OD, e degli angoli sopra BO uguali ciascuno a ciascuno agli angoli sopra DO. Ora, il triangolo BRO equivale al triangolo AVO (*N.* 401.); dunque AVO = FOD: poi d'amendue le parti levando il trapezio AKDO abbiamo VKD = AKF; e da VKD levando il triangolo LQP, e da AKF il trapezoide PEFD uguale al triangolo LQP, come sopra s'è veduto, resta VLQPDK = AEPDK; finalmente, d'amenduele parti togliendo la parte comune AKDPQZ, avremo VAZL = ZQE, cioè 'l triangolo ZQE, fatto dalle parallele tirate dal punto Q col diametro AC, uguale al trapezoide AVLZ, fatto dalla tangente AV di questo diametro, e dalla sua parallela.

Se 'l punto Q, da cui tiransi delle parallele alle tangenti, fosse sopra la semicirconferenza BCT (*Fig.* 253.), tal che la parallela QT segasse il diametro BD al di sopra di O, la similitudine de' triangoli QVL, VAX conchiuder sarebbe come prima; che 'l triangolo TLQ fatto col diametro BD equivale al trapezoide BRMT; poi dal punto C tirando la tangente CK, che sega BD in *t* ed MA in K, troverebbesi come sopra, ch'il triangolo QME fatto coll'altro diametro è uguale al trapezoide EL*t*C formato dalla tangente C*t* di esso diametro, e dalla sua parallela.

Comprendesi in fine dalla Figura 254, che se 'l punto Q fosse sopra la semicirconferenza BCD, e la parallela QT segasse BD al di sotto di O, converrebbe da questa parte far ciò, che s'è fatto dall'altra nella Figura 252. Il che doveasi 2°. dimostrare.

AVVERTIMENTO. Esenzialissime sono per le Sezioni Coniche questa, non meno che la precedente Proposizione; anz' io premetto per avviso, che quando queste perfettamente si sappiano, con tutto ciò ch'abbiamo detto intorno 'l circolo, sarà cosa mirabile, allorchè si tratterà delle Sezioni Coniche, di vedere, che lo Studio di queste Curve altro non è ch' un' applicazion naturale de' più semplici principj.

Del

Del cangiamento delle Figure, e della lor riduzione di maggiori in minori, e di minori in maggiori.

404. *Data qualsivoglia figura* ABCDEF (Fig. 282.) *fare un triangolo, che le sia uguale.*

Dalla data Figura levo mediante la diagonale AC un triangolo ABC; dal vertice B tiro la retta BP parallela ad AC, finchè seghi in P uno de' lati AF prolungato; ciò che mi dà un quadrilatero PBCA, in cui tirando l'altra diagonale PC, ho due triangoli BAC, CPA uguali, mercè che hanno la stessa base CA, e sono fra le due parallele CA, BP. Dunque, dalla data Figura levando il triangolo BAC ed in sua vece sostituendo il triangolo PAC, ho la figura PCDF uguale alla data, e minore di un' angolo.

Colla diagonale DF sego il triangolo DEF; dal vertice E di detto triangolo tiro EH parallela a DE, finchè concorra nel lato AF prolungato in H; il che mi dà 'l quadrilatero FDEH, in cui tirando l'altra diagonale DH, ho due triangoli uguali FED, FHD, poichè hanno la base comune FD, e sono fra due parallele. Dunque, dalla figura PCDF levando 'l triangolo FDE ed in sua vece sostituendo il triangolo FDH, ho la figura PCDH uguale alla data, e minore di due angoli.

Da questa figura levo mediante la diagonale CH il triangolo CDH; poi dal vertice D di detto triangolo tiro DR parallela a CH, finchè concorra nel lato AF prolungato in R; e tirando la retta CR, uguali sono i triangoli CDH, CHR, per avere la medesima base CH, e per essere fra due parallele: così, in vece di CDH sostituendo CHR, ho 'l triangolo PCR uguale alla figura data.

405. PROBLEMA. *Costruire un rettangolo uguale a un dato triangolo* ABC (Fig. 255,).

Dal vertice B sopra la base AC tiro la perpendicolare BS; divido per mezzo BS in R, e colla base AC ed altezza CR faccio 'l rettangolo AEDC uguale al dato triangolo ABC, per essere ABC uguale alla sua base AC moltiplicata per la metà della sua altezza BS, cioè per SR (*N.* 375.), e per essere il rettangolo AEDC uguale al medesimo prodotto.

Ovvero, divido per mezzo in R la base AC del triangolo (*Fig.* 256.), e colla metà AR ed altezza BS del triangolo faccio un rettangolo AEDR uguale al triangolo dato.

Poi-

Poichè, il rettangolo AEFC d' uguale altezza e base del triangolo è doppio del triangolo: ora avendo i rettangoli AEDR, AEFC la medesima altezza AE, sono fra loro come le lor basi AR, AC (*N.* 373.); dunque, essendo AEDR la metà di AEFC, egli è per conseguente uguale al triangolo.

406. PROBLEMA. *Dato un triangolo* ABC (Fig. 257.) *costruire un parallelogrammo, che li sia uguale, e che abbia un' angolo dato.*

Dal vertice B tiro EF parallela alla base AC; in A faccio un' angolo CAE uguale all' angolo dato, e terminando il parallelogrammo AEFC sego per mezzo AC in P, da cui io tiro PB parallela ad AE; il che mi dà 'l triangolo ABC uguale al parallelogrammo AEBP; imperocchè, avendo i parallelogrammi AEBP, AEFC la medesima altezza, sono fra loro come le lor basi AP, AC, cioè 'l parallelogrammo AEBP è la metà del parallelogrammo AEFC: ora, anche il triangolo ABC è la metà del parallelogrammo AEFC; dunque, ec.

Ovvero divido per mezzo in H il lato AE, e da detto punto tiro HR parallela ad AC; ciò che mi dà il parallelogrammo AHRC uguale al triangolo, per essere sì l'uno che l'altro la metà del parallelogrammo AEFC.

407. PROBLEMA. *Data qualsivoglia figura costruire un rettangolo, od un parallelogrammo, che le sia uguale.*

Cangio perciò la figura in un triangolo ad essa uguale (*N.*404.), e con esso io formo il rettangolo, o 'l parallelogrammo cercato (*N.* 405. 406.).

408. PROBLEMA. *Costruire un quadro uguale ad un parallelogrammo, o triangolo, o a qualunque data figura.*

Affine di costruire un quadrato uguale al parallelogrammo ABCD (*Fig.* 258.), piglio una media proporzionale AE infra l' altezza AB, e la base AD; e 'l quadro AF fatto sopra questa proporzionale uguaglia il rettangolo; imperocchè avendo noi AB . AE : : AE . AD, abbiamo altresì $\overline{AE}^2 = AB \times AD$: ora $AB \times AD$ è 'l parallelogrammo; onde il quadro AF è uguale a detto parallelogrammo.

Se la data figura è un triangolo, prendo una media proporzionale fra la metà della sua altezza, e la sua base; ed equivalendo il quadro di questa media proporzionale al prodotto degli estremi, egli è in conseguenza uguale al dato triangolo.

In

In fine, se la figura è un poligono regolare, io la riduco in triangoli, e termino'l rimanente come s'è detto.

409. PROBLEMA. *Cangiare un triangolo in un' altro, di cui sia data una base, od un' altezza.*

Sia ABC (*Fig.*259.) il triangolo, che si vuol cangiare in un' altro, ch'abbia l'altezza EH. Cerco una quarta proporzionale alla data altezza EH, all'altezza BD del triangolo ABC, e alla sua base AC; all'estremità H dell'altezza EH alzo la perpendicolare RP, ch'io faccio uguale alla quarta proporzionale ritrovata; e tirando le linee RE, PE, il triangolo REP, di cui EH è l'altezza; equivale al dato triangolo ABC, poichè per la costruzione l'altezze EH, BD di questi due triangoli son reciproche alle basi AC, RP; dunque i due triangoli son' uguali (*N.* 376.).

Se vogliamo, ch'il triangolo ABC sia cangiato in un'altro, ch' abbia per base RP; cerco una quarta proporzionale alle basi RP, AC, e all'altezza BD; e sopra RP alzando una perpendicolare HE, ch' io faccio uguale alla quarta proporzionale ritrovata, tiro le rette RE, EP, che mi danno il triangolo REP uguale al triangolo ABC, a motivo delle basi RP, AC reciproche per la costruzione all'altezze BD, EH.

410. COROLLARIO. *Nel modo stesso si cangerà un rettangolo, od un parallelogrammo in un'altro, di cui sia data una base, od un'altezza.*

411. COROLLARIO. Così pure, se si volesse cangiar qualsivoglia poligono regolare, od irregolare in un triangolo, di cui data fosse una base, od un'altezza; prima si cangerebbe detta figura in triangolo (*N.* 404.), e quindi 'l triangolo cangerebbesi in un'altro, di cui fosse data la base, o l'altezza: e se 'l poligono si volesse cangiare in un rettangolo, o parallelogrammo, di cui data fosse un'altezza, od una base; detto poligono prima si cangecebbe in rettangolo, o parallelogrammo (*N.*407.), e quindi 'l rettangolo, o parallelogrammo cangerebbesi in un'altro, di cui fosse data la base, o l'altezza (*N.* 410.).

412. PROBLEMA. *Costruire una Figura uguale a più Figure date.*

Riduco le date figure in triangoli (*N.* 404.), ch' io suppongo essere i tre ABC, EFD, HIL (*Fig.* 260.), li qual'io riduco ad una medesima altezza IM (*N.* 409.), ovvero, il ch' è lo stesso, cerco la base LP, che dar conviene al triangolo ABC, affinch' egli possa avere l'altezza IM; pongo questa base in diritto

colla

colla base HL, e tirando la retta PI, il triangolo PLI equivale al triangolo ABC (*N.* 376.); e per conseguente il triangolo HIP equivale ai due HIL, ABC.

Cerco altresì la base PQ da darsi al triangolo EFD, affinch'egli aver possa l'altezza IM, e ponendo detta base in diritto con HP, e tirando la retta QI, il triangolo PQI uguaglia EFD; onde l'intero HIQ è uguale ai tre triangoli, e per conseguente alle tre figure date.

413. PROBLEMA. *Date due Figure* X, Q (Fig. 261.) *ritrovarne una terza simile alla prima* X, *ed uguale alla seconda* Q.

Riduco la figura X in un triangolo, ch'io poscia cangio in un'altro AMB, il quale abbia per base il lato AB; cangio parimente la figura Q in un triangolo BMP, che abbia la medesima altezza del triangolo AMB: così 'l triangolo AMP è uguale alle due date figure. Sopra AP descrivo un semicircolo APR, e in B alzo la perpendicolare BR, su cui costruisco la figura Y simile alla figura X; e dico, che la figura Y equivale alla figura Q.

Imperocchè, uguale essendo l'altezza de' triangoli AMB, BMP, essi sono fra loro come le lor basi AB, BP: ma AMB = X, e BMP = Q; dunque X . Q : : AB . BP: ora, le figure simili X, Y sono fra lor come i quadri $\overline{AB}^2 . \overline{BR}^2$ de' loro lati omologhi AB, BR (*N.* 392.); e poichè nel semicircolo APR la linea BR è media proporzionale fra i segmenti AB, BP, abbiamo AB . BR : : BR . BP; onde si ha parimente $\overline{AB}^2 . \overline{BR}^2$: : AB . BR, ed in conseguenza X . Y : : AB . BP: ma già si è trovato X . Q : : AB . BP; dunque X . Y : : X . Q; il che ci dà Y = Q.

414. COROLLARIO. Si può dunque con tal mezzo cangiare più figure, che non sieno fra loro simili, in un medesimo numero di figure perfettamente simili all'una delle date.

415. PROBLEMA. *Dato il lato d'un Poligono regolare trovar' il Poligono.*

Sia AB la retta (*Fig.* 262.), su cui si vuol descrivere un pentagono regolare; con qualsivoglia raggio OM descrivo un circolo, in cui v' iscrivo un pentagono regolare, ch' io divido ne' suoi cinque triangoli uguali; quindi sopra la retta AB costruisco un triangolo ARB simile al triangolo MON, facendo gli angoli A, B uguali ciascuno a ciascuno agli angoli M, N, finalmente, dal

dal vertice R preso per centro col raggio RA descrivo un circolo, in cui cinque volte portando la corda AB, ho'l pentagono cercato; poichè l' angolo ARB uguale all'angolo MON vale la quinta parte della circonferenza ABVTX, siccome l'angolo MON vale la quinta della circonferenza MNPQT.

416. PROBLEMA. *Ridurre qualsivoglia figura in Poligono regolare.*

Cangio la data figura in un triangolo, ch' io suppongo essere il triangolo ABC (*Fig.* 263.); divido la sua base AC in cinque parti uguali, e da' punti di divisione tiro al vertice le rette DB, EB, ec. che dividono il triangolo in cinque triangoli uguali, mercè che tutti hanno la medesima altezza, e le basi uguali. Con qualsivoglia raggio OR descrivo un circolo, in cui v' iscrivo un pentagono, ch'io divido ne' suoi cinque triangoli. Faccio un triangolo TSV simile all'uno de' triangoli ROT del pentagono, ed uguale al triangolo ABD quinta parte del triangolo ABC (*N.* 413.); e dal vertice V col raggio VT descrivendo un circolo, porto ST cinque volte intorno la circonferenza, il che ci dà un pentagono uguale al triangolo ABC, ed in conseguenza alla data figura; poichè i cinque triangoli di questo pentagono sono uguali a' cinque triangoli, che compongono il triangolo ABC, e l'angolo TVS abbraccia la quinta parte della circonferenza del suo circolo, siccome l' angolo ROT suo uguale ne abbraccia la quinta della circonferenza del suo.

417. PROPOSIZIONE XCVI. *Se dato qualsivoglia quadrilatero* ABCD (Fig. 264.) *colle sue diagonali* AC, BD *dividesi per mezzo in* E *l'uno de' lati* AB, *e che da detto punto di divisione tirisi la retta* EF *parallela all'una delle diagonali* AC, *quindi dal punto* F *la retta* FG *parallela all'altra diagonale* BD, *dal punto* G *la retta* HG *parallela alla diagonale* AC, *e finalmente dal punto* H *la retta* HE *parallela alla diagonale* BD; *io dico, che quest' ultima parallela segherà il lato* AB *nel punto* E, *il quale lo divide in due parti eguali, e che la figura* EFGH *sarà un parallelogrammo metà del quadrilatero dato.*

Nel triangolo ABC parallele essendo le basi AC, EF, elle segano proporzionalmente i lati AB, BG: ora AB è segato per mezzo in E; dunque BG è altresì in due parti uguali segato in F. Per la medesima ragione, nel triangolo BCD, le cui basi BD, FG son parallele, il lato CD è segato per mezzo in G, e nel triangolo CDA, le cui basi AC, GH sono parallele, il lato AD

è segato per mezzo in H: così nel triangolo ABD, la linea HE tirata dal punto H parallela alla base dee segare il lato AB nel punto E, che lo divide per mezzo; ciò che doveasi 1°. dimostrare.

Parallele essendo le rette EF, HG alla medesima retta AC, sono fra loro parallele: per la medesima ragione, sono fra loro parallele le rette EH, FG parallele alla stessa retta BD; dunque la figura EFGH è un parallelogrammo; ciò che doveasi 2°. dimostrare.

Fra loro essendo i triangoli simili ABC, EBF come i quadri de' loro lati omologhi AB, EB (*N.392.*), che sono come 2 ad 1, ne segue, che detti due triangoli sono fra loro come 4 è ad 1, cioè 'l triangolo EBF è'l quarto del triangolo ABC; e per la medesima ragione HGD è'l quarto del triangolo ACD: così, li due EBF, HGD pres' insieme sono'l quarto del quadrilatero ABCD; Proveremo altresì, ch'essendo 'l triangolo EAH il quarto del triangolo BAD, e'l triangolo FCG il quarto del triangolo BCD, i due EAH, FCG presi insieme sono parimente 'l quarto del quadrilatero ABCD; levando dunque dal quadrilatero i quattro triangoli EBF, HDG, EAH, FCG, che vagliono i due quarti, o la metà del quadrilatero, il residuo, cioè 'l parallelogrammo EFGH sarà la metà di detto quadrilatero.

418. COROLLARIO. *Se'l quadrilatero ha uno de' suoi angoli rientranti* (Fig.265.), *sempre si proverà, ch' il parallelogrammo* EFGH *n'è la metà.*

Prolungo le parallele EH, FG e la diagonale BD, finattantochè seghino l'altra diagonale AC ne' punti M, N, R; e proverò come sopra, ch' il triangolo EBF è'l quarto del triangolo ABC, ch' il triangolo AEM è'l quarto del triangolo ABR, e ch' il triangolo CFN è'l quarto del triangolo BRC; dal che ne segue, ch' i tre triangoli EBF, AEM, CFN sono insieme i due quarti, o la metà del triangolo ABC, e ch' in conseguenza il parallelogrammo rimanente EFNM è la metà di detto triangolo, o del quadrilatero ABCD, più la metà del triangolo ADC, cioè EFNM $= \frac{1}{2}$ABCD $+ \frac{1}{2}$ADC.

Ora, uguali essendo nel triangolo ADC i tre triangoli HDG, AHM, CGN alla metà di esso triangolo, il rimanente HGNM ne vale l'altra metà; ed abbiamo HGNM $= \frac{1}{2}$ADC: ma egli s'è già ritrovato EFNM $= \frac{1}{2}$ABCD $+ \frac{1}{2}$ADC; onde, dal primo membro levando il parallelogrammo HGNM, e dall'altro $\frac{1}{2}$ADC, che gli è uguale, avremo EFGH $= \frac{1}{2}$ABCD.

419. PRO-

419. PROPOSIZIONE XCVII. *Data qualsivoglia figura* ABG (Fig. *266.*) , *se da un punto preso fuori , o dentro la Figura tiransi le rette* OA, OC, OB *a ciascun' angolo, e che divisa l'una di esse* OA *in qualsivoglia ragione in* E, *dal punto* E *tirisi la retta* EF *parallela alla base* AC *del triangolo* AOC , *quindi dal punto* F *la retta* FH *parallela alla base* BC *del trangolo conseguente* COB, *e così a mano a mano l'ultima parallela* HE *passerà pel punto* E, *e la figura* EFH *formata da dette parallele sarà simile alla Figura* ABC.

Nel triangolo AOC, la parallela EF sega il lato OC nella stessa ragione del lato OA: così pure nel triangolo COB la parallela FH sega il lato OB nella medesima ragione del lato OC ; dunque OB è segato in H nella stessa ragione che AO lo è in E ; ed in conseguenza la parallela tirata dal punto H passar dee per E. Il che doveasi 1°. dimostrare.

Il triangolo OEF è simile al triangolo OAC, a motivo dell'angolo comune O, e delle basi parallele EF , AC ; per ciò anche il triangolo OFH è simile al triangolo OCB, e'l triangolo OHE al triangolo OBA; essendo dunque le due Figure ACB, EFH composte d'un'egual numero di triangoli simili, elle sono altresì simili fra loro.

420. COROLLARIO. Se 'l punto O fosse preso sul perimetro della figura (*Fig. 267.*) , proverebbesi come sopra , che EF , FH, ec. formerebbono una Figura EFHRS simile alla Figura APBDG.

421. PROBLEMA . *Data una Figura* ABCD (Fig. 268.) *descriverne un'altra simile, e che con essa sia in qualsivoglia ragione.*

Prendo un punto O od entro la Figura , o fuori , o sul perimetro , o finalmente all'uno degli angoli ; da detto punto tiro delle rette a ciascun' angolo, e supponendo, che la Figura ricercata non abbia ad essere che la metà della data , divido per mezzo in R l' una delle rette OA ; cerco una media proporzionale OE infra OR ed OA , e da E tiro EH parallela ad AB, poi HS parallela a CB, e così successivamente ; il che mi dà la Figura EHSV simile e metà della data. Poichè, queste Figure sono fra loro come i quadrati delle linee OE , OA similmente poste (*N. 392.*) : ma per la costruzione si ha OA . OE : : OE . OR ; dunque $\overline{OA}^2 . \overline{OE}^2$: : OA . OR (*N. 393.*) : ora $\overline{OA}^2$ è'l doppio di OR ; onde $\overline{OA}^2$ è 'l doppio di $\overline{OE}^2$, e per conseguente la data Figura è'l doppio della Figura EHSV.

Se vogliamo, che la Figura EHSV (*Fig.* 269.) sia 'l doppio della data, prolungo OA in R, talmente che AR sia uguale ad OA; piglio una media proporzionale OE infra OA, OR; da E tiro EH parallela ad AB, ec. e la Figura EHSV è 'l doppio della data: imperocchè, a motivo di OA . OE : : OE . OR, abbiamo $\overline{OA}^2 . \overline{OE}^2$: : OA . OR : : 1 . 2 (*N.* 393.) ; ed in conseguenza la data Figura non è che la metà di EHSV.

Se vogliamo, che la Figura EHSV sia alla data, come una linea MN è ad una linea MP; cerco una quarta proporzionale OR alle tre linee MP, MN, OA, quindi una media proporzionale OE tra OA ed OR, e termino l'operazione come sopra. Ciò dimostrasi nella stessa maniera.

422. AVVERTIMENTO. Puossi abbreviare l'operazione, sovrapponendo agli angoli della Figura il punto O (*Fig.* 270.) ; poichè allora trovasi la Figura divisa in due triangoli di meno, e conseguentemente si hanno a tirare manco parallele: amendue i metodi sono di gran giovamento, e col mezzo loro qualsivoglia Figura riducesi di maggiore in minore, e viceversa.

423. PROBLEMA. *Dati due quadri ritrovarne quanti si voglia altri, i quali presi due a due sieno uguali ai due dati.*

Supponiamo, che le rette AB, BC (*Fig.* 271.) sieno i lati de' due dati quadri; con essi formo un'angolo retto ABC, poi tirando l'ipotenusa AC descrivo 'l semicircolo ABDC, che passa pel punto B, poichè l'angolo ABC è retto. Da qualsivoglia punto D della circonferenza tiro all'estremità del diametro due rette DA, DC; e per conseguente, retto essendo ancora l'angolo ADC, i quadri delle rette AD, DC presi insieme sono uguali al quadrato della lor' ipotenusa AC: ma i quadri delle rette AB, BC presi insieme sono altresì uguali al quadrato della stessa ipotenusa .. Dunque $\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$; e siccome infiniti punti vi sono nel quarto di circonferenza ABD, egli è per se evidente, che da ciascuno d'essi tirando due linee all'estremità A, C del diametro s'avrebbono infiniti quadri, i quali presi due a due sarebbero uguali ai due dati.

Quanto poi a tutt'i punti dell'altro quarto di circolo DC, egli è manifesto, che tutte le linee, le quali da detti punti tirerebbonsi all'estremità A, C, sarebbono le medesime due a due di quelle, che sarebbero state tirate dal quarto di circolo ABD, e ch'in conseguenza i loro quadrati sarebbon gl'istessi.

424. CO-

424. COROLLARIO. *Quantunque ritrovar si possano infiniti quadri, li quali presi due a due sieno uguali, ciò non ostante giammai si troverà, ch'uguali sieno le lor Radici prese due a due: ma le due maggiori saranno le due uguali* AD, DC, *e l'altre* AB, BC *saranno tanto minori delle due uguali* AD, DC, *quanto elle saran più disuguali fra loro.*

Se vogliamo, che le due disuguali AB, BG prese insieme equivagliano alla somma delle due uguali AD, DC; dal punto C, e col raggio CD descrivo l'arco DE, il che mi dà $CE = DC$; ed in conseguenza BE è l'eccesso del lato BC sul lato DC: similmente dal punto A e col raggio AB descrivo l'arco BR, ciò che mi dà $AB = AR$; ed in conseguenza DR è l'eccesso di AD, o DC sua uguale sopra AB. Così, affinchè uguali sieno le due AB, BC alle due DC, DA, e'fa d'uopo, che l'eccesso BE, di cui BC supera DC, sia uguale all'eccesso DR, di cui DA supera BA. Ora, ciò posto.

Noi abbiamo $BG = DC + BE$, ed $AB = AD - DR = DC - BE$, a motivo di $AD = DC$, e di $DR = BE$ per ipotesi; onde $\overline{BC}^2 = \overline{DC}^2 + 2BE \times DC + \overline{BE}^2$, e $\overline{AB}^2 = \overline{DC}^2 - 2BE \times DC + \overline{BE}^2$; e sommando queste due equazioni, avremo $\overline{BG}^2 + \overline{AB}^2 = 2\overline{DC}^2 + 2\overline{BE}^2$: ma i quadrati di AD, DC sono $\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = 2\overline{DC}^2$; dunque, se vera fosse l'ipotesi, i due quadri di AB, BC presi insieme eccederebbero la somma de'quadrati di AD, DC di due volte'l quadro di BE: ma egli s'è dimostrato, ch'i quadrati di AB, BC non superano i quadri di AD, DC; però, supponendo le radici AB, BC prese insieme uguali alle radici AD, DC, elle si suppongono più grandi di quel che sono.

Nello stesso modo si proverà, ch'i due lati, o le due radici AH, HC sono insieme minori delle due AB, BC, che son meno disuguali fra loro.

425. PROBLEMA. *A due date Figure ritrovare una media proporzionale.*

Se le due date Figure non sono simili, le riduco in triangoli d'ugual'altezza, affinchè sieno fra loro come le basi di detti triangoli; prendendo poscia una media proporzionale fra esse due basi, sopra detta media formo un triangolo d'ugual'altezza degli altri due, ed egli sarà medio proporzionale fra gli altri

due,

due, ed in conseguenza fra le due Figure: ciò ch'è per se evidendente, poichè i triangoli d'ugual'altezza sono fra loro come le lor basi, e perchè per la costruzione le basi sono in proporzione continua.

Ma se le due Figure son simili, fra due de' loro lati omologhi piglio una media proporzionale, e sopra vi descrivo una Figura simile, la qual'è parimente media proporzionale fra l'altre due; imperocchè, essendo in proporzione continua i tre lati omologhi, lo saranno altresì i loro quadri. Ora, queste Figure sono fra loro come i quadri de' loro lati omologhi. Dunque, ec.

426. PROBLEMA. *Esprimere in linee la Ragione di più Figure date.*

Riduco le date Figure in triangoli d'uguale altezza, e le basi di detti triangoli esprimono la ragione delle Figure fra loro.

Della Geodesia, o divisione delle Figure sul Terreno.

427. PROBLEMA. *Dividere un triangolo in qualsivoglia numero di parti uguali, o disuguali in ragion data col mezzo delle linee tirate dalla base al vertice.*

Per dividere 'l triangolo ABC (*Fig.* 272.) in tre parti uguali, divido la base in tre ugualmente ne' punti E, H; da cui tirando al vertice le rette EB, HB, il triangolo trovasi diviso in tre triangoli uguali, poichè hanno la stessa altezza, e le basi uguali (*N. 376.*).

E per dividere 'l medesimo triangolo in tre parti, le quali sieno fra loro come le tre RS, SM, MN della retta RN, divido la base nella stessa ragione della retta RN; e supponendo, ch'i punti di divisione sieno E, H, al vertice B tiro delle rette, che dividano 'l triangolo in tre triangoletti, i quali sieno fra loro come le lor basi, ed in conseguenza come le rette RS, SM, MN.

428. PROBLEMA. *Dividere un triangolo* ABC (Fig. 273.) *in quante si voglia parti uguali, o disuguali col mezzo delle linee tirate da un punto* O *preso sul perimetro del triangolo.*

Se vogliamo, ch'ei sia diviso in tre parti uguali, divido 'l lato BC in tre ugualmente ne' punti D, E, e 'l triangolo ABC si troverà diviso in tre triangoli uguali BAD, DAE, EAC. Tiro la retta OA, e da' punti D, E tiro le rette DR, ES parallele ad OA; finalmente, dal punto O tiro le rette OR, OS, che dividono 'l triangolo ABC in tre parti uguali.

Imperocchè i triangoli RDA, RDO, che han la base comu-

ne

ne RD, e che sono fra le parallele RD, AO, son' uguali (N. 374.) onde a ciascuno d'essi aggiugnendo la parte comune RBD, avremo il triangolo DAB uguale al triangolo ORB: ma DAB è 'l terzo del triangolo ABC; dunque ORB n'è parimente il terzo.

Così pure i triangoli ESA, ESO, che han la base comune ES, e che sono fra le parallele AO, SE, son' uguali; e però, aggiugnendo la parte comune SEC, i triangoli ACE, OSC sono uguali: ma AEC è 'l terzo del triangolo ABC; dunque OSC n'è altresì 'l terzo, e per conseguenza il quadrilatero ROSA è 'l terzo rimanente.

Se vogliamo, che le tre parti sieno fra loro come le parti HP, PQ, QT della retta HT, divido la retta BC nella medesima ragione di HT, e termino l'operazione come sopra.

429. PROBLEMA. *Dividere un triangolo* ABC (Fig. 274.) *in qualsivoglia numero di parti uguali, o disuguali col mezzo delle linee parallele alla base* AC.

Se vogliamo, ch'ei sia diviso in tre parti uguali, divido in tre ugualmente il lato AB ne' punti E, R; prendo una media proporzionale BH fra la retta BA e 'l suo terzo BE, e tiro HM parallela alla base. Piglio ancora una media proporzionale BN fra la retta BA e i suoi due terzi BR, e tirando la retta NP parallela alla base, il triangolo ABC trovasi diviso in tre parti uguali dalle parallele HM, NP.

Poichè, i triangoli simili BHM, BAC sono fra loro come i quadri de' loro lati omologhi BH, BA (*N.* 392.): ora per la costruzione noi abbiamo BE . BH :: BH . BA. Dunque $\overline{BE}^2 . \overline{BH}^2$ :: BE . BA :: 1 . 3 (*N.* 393.); e per conseguenza il triangolo BHM è 'l terzo del triangolo BAC. Così ancora si proverà, ch'il triangolo BNP è i due terzi del triangolo BAC; donde ne segue, che da questo levando 'l triangolo BHM, il residuo HMNP sarà parimente 'l terzo del triangolo, e però il trapezoide NPCA sarà 'l terzo rimanente.

Se vogliamo, ch'il triangolo sia diviso in tre parti, le quali sieno fra loro come le tre SQ, QT, TV della retta SV, divido 'l lato BA nella medesima ragione di SV, e termino l'operazione come sopra.

430. PROBLEMA. *Dividere un triangolo* ABC (Fig. 275.) *in qualsivoglia numero di parti uguali, o disuguali col mezzo delle linee, che partono da un medesimo punto nell' area, che non è dato.*

Se

Se vogliamo, ch'il triangolo sia diviso in quattro parti uguali, piglio AR uguale alla quarta parte della base; dal punto R tiro la retta RV parallela al lato AB; divido per mezzo RV in O, e tirando le rette OA, OB, il triangolo OAB è'l quarto del triangolo ABC; poichè, tirando la retta RB, i triangoli ABO, ABR, che han la base comune AB e che sono fra le parallele AB, RV, sono uguali: ma ABR è'l quarto del triangolo ABC, poichè entrambi hanno la medesima altezza, e poichè la base AR è'l quarto della base AC; dunque il triangolo ABO è altresì 'l quarto del triangolo ABC.

Ora, il trapezoide rimanente AOBC si è li tre quarti del triangolo ABC, ed in conseguenza e' conviene dividerlo in tre parti uguali. Ma in questo trapezoide i triangoli ROC, VOC, i quali hanno le basi RO, VO uguali per la costruzione, e la medesima altezza, poichè hanno'l vertice in C, sono uguali; ed i triangoli AOR, BOV, i quali hanno parimente le basi uguali, e sono fra le parallele AB, RV, sono altresì uguali; onde i triangoli AOC, BOC sono fra loro uguali; perciò, dividendo in tre parti ognuna delle lor basi, e da' punti di divisione tirando delle rette al punto O, abbiam sei parti uguali, che prese due a due ce ne danno tre AOS, SOTC, BOT, ciascuna delle quali è'l quarto del triangolo ABC.

Se vogliamo, ch'il triangolo sia diviso in quattro parti, le quali sieno fra loro come le parti MN, NP, PQ, QX della retta MX; sopra la base AC prendo una parte AR, tal che s'abbia AR. AC :: MN. NX, e terminando il resto come sopra, il triangolo ABO è al triangolo totale ABC, come MN è ad MX; e resta solo a dividere il trapezoide AOBC, in tre parti che sieno fra loro come l'altre NP, PQ, QX della retta MX, col mezzo del punto O preso sopra'l suo circuito; ciò che noi insegneremo nel seguente Problema.

431. PROBLEMA. *Dividere qualsivoglia Figura* ABCDE (Fig. 276.) *in qualunque numero di parti uguali, o disuguali col mezzo delle linee tirate dal punto* O *preso sul circuito*.

Se vogliamo, che la Figura sia divisa in tre parti uguali, dal punto O tiro a ciascun' angolo le rette OA, OB, OC, che la dividono in triangoli; cangio questi in altri triangoli PMQ, QMR, RMS, SMT, che lor sieno uguali ciascuno a ciascuno, e ch' abbiano la medesima altezza, cioè PMQ = AEO, QMR = AOB, e così di seguito; e per conseguente 'l triangolo totale PMT equivale alla Figura ABCDE. Di-

Divido in tre ugualmente la base PT ne'punti N, L, e quindi al vertice M tiro le rette NM, LM, che dividono 'l triangolo PMT in altri tre PMN, NML, LMT fra loro uguali, a cagione delle basi uguali, e dell'altezza comune.

Ora, cadendo il punto N del terzo PN sopra la base QR del triangolo QMR = AOB, divido la base AB del triangolo AOB in X nella medesima ragione che in N lo è la base QR, e tirando la retta XO, il triangolo AOX è al triangolo AOB, come la base AX è alla base AB: ma QMN è al triangolo QMR, come QN è a QR, o come AX è ad AB; dunque AXO. AOB : : QMN. QMR, e a motivo di AOB = QMR abbiamo AXO = QMN : ora EOA = PMQ; onde EOA + AOX = PMQ + QMN, od EOXA = PMN : ma PMN è'l terzo del triangolo PMT uguale alla Figura ABCDE; perciò EOXA è'l terzo di detta Figura.

Così pure, acciocchè 'l punto L della seconda divisione uguale NL cada sulla base RS del triangolo RMS uguale al triangolo BOC, divido la base BC di detto triangolo in Z nella medesima ragione, in cui la base RS lo è in L, e tirando la retta OZ, la parte XOZB è altresì un terzo della Figura; imperocchè, a cagione di AOB = QMR, e di AOX = QMN, abbiamo XOB = NMR: ora BOZ. BOC : : BZ. BC : : RL. RS, ed RML. RMS : : RL. RS; onde BOZ. BOC : : RML. RMS; e a motivo di BOC = RMS abbiamo BOX = RML, ed in conseguenza XOB + BOZ = NMR + RML, ovvero XOZB = NML: ma NML è'l terzo del triangolo PMT uguale alla Figura ABCDE. Dunque XOZB n'è altresì 'l terzo, e per conseguenza OZCD è 'l terzo rimanente.

Se vogliamo, che la Figura sia divisa in ragione di tre linee disuguali, dividasi la base PT nella medesima ragione, e si cominci ad operar come sopra.

432. AVVERTIMENTO. Quindi chiaramente scorgesi, che con egual facilità dividesi in ragion data una Figura in parti così uguali come disuguali; perciò parleremo soltanto della divisione delle Figure in parti uguali.

433. PROBLEMA. *Data una Figura* ABCD (Fig. 277.) *dividerla in qualsivoglia numero di parti uguali col mezzo d'un punto* O *dato nell'area.*

Da O tiro a ciascun'angolo le rette OA, OB, OC, OD, che dividono la Figura in triangoli. Riduco questi in altri triangoli

MEN, NEP, PEQ, QER, che lor sieno uguali ciascuno a ciascuno, e ch' abbiano una medesimà altezza, cioè MEN = AOD, NEP = AOB, PEQ = BOC e QER = COD; ed in conseguenza l' intero triangolo MER è uguale alla Figura ABCD.

Se dunque vogliamo dividere la Figura in tre parti uguali; divido in tre ugualmente la base MR ne' punti H, L, da cui al vertice tiro le rette HE, LE, che dividono 'l triangolo MER in tre triangoli MEH, HEL, LER fra loro uguali, e di cui per conseguenza ciascuno è 'l terzo del triangolo MER; o della Figura ABCD: così, poichè il punto H del terzo MH cade sulla base NP del triangolo NEP uguale al triangolo AOB, divido la base AB di detto triangolo in X nella medesima ragione, in cui NP lo è in H, e tirando la retta XO, la parte DOXA è 'l terzo della Figura; il che si dimosterà come nel precedente Problema. Così pure, cadendo il punto L della seconda divisione uguale HL sopra la base PQ del triangolo PEQ uguale al triangolo BOC, divido la base BC di questo triangolo in Z nella stessa ragione, in cui la base PQ lo è in L; e tirando ZO, la parte XOZB è altresì 'l terzo della Figura, ed in conseguenza l' altro terzo si è la parte DOZC.

434. COROLLARIO. Dello stesso metodo ci serviremo, quando avrassi a dividere un triangolo per un punto dato nell' area; imperocchè conviene riflettere, che nel Problema del numero 430 il punto nell'area non era dato, e che anzi trattavasi di ritrovarlo, quando in questo dobbiamo necessariamente astrignerci al dato punto.

435. PROBLEMA. *Dividere un trapezoide* ABCD (Fig.278.) *in qualsivoglia numero di parti uguali.*

Se vogliamo, ch' ei sia diviso in quattro ugualmente; dividasi la base inferiore AB in quattro parti uguali ne' punti M, N, R dividasi pure la base superior DC in quattro ugualmente ne punti S, T, X, e da'punti di divisione tirando le rette MS, NT, RX, il trapezoide è diviso in quattro altri trapezoidi uguali.

Poichè, il trapezoide ADSM è uguale al prodotto della somma delle sue due basi AM, DS per la metà della sua altezza (*N.386.*) ora, gli altri tre trapezoidi hanno la medesima altezza e le basi uguali alle due AM, DS; essi son dunque uguali allo stesso prodotto.

436. PROBLEMA. *Dividere un trapezoide* ABCD (Fig.280.) *col mezzo delle linee parallele alla sua base.*

Pro-

Prolungo i lati non paralleli AD, CB finchè concorrano in E; riduco 'l trapezoide in un triangolo MNP, che sia ad esso uguale, e 'l triangolo DEC in un'altro PNS, che li sia pure uguale, e che abbia la medesima altezza del triangolo MNP: così 'l trapezoide ABCD è al triangolo DCE, come il triangolo MNP è al triangolo PNS, o come la base MP alla base PS, poichè i due triangoli hanno l'istessa altezza.

Se dunque vogliamo, ch'il trapezoide sia diviso in tre parti uguali, divido la base MP in tre ugualmente ne' punti Q, R, da cui tiro le rette QN, RN, che dividono 'l triangolo MNP in tre parti uguali; infra SP ed SR piglio una media proporzionale SO, quindi una quarta proporzionale EL alle tre linee SP, SO, ED; e dal punto L tirando LH parallela alla base AB, la parte LHCD è 'l terzo del trapezoide.

Poichè, simili essendo i triangoli EDC, ELH, essi son fra lor come i quadri $\overline{ED}^2$, $\overline{EL}^2$ de' loro lati omologhi: ora, noi abbiam per la costruzione ED . EL : : SP. SO; dunque $\overline{ED}^2$. $\overline{EL}^2$: : $\overline{SP}^2$. $\overline{SO}^2$: ma noi abbiamo altresì SP. SO : : SO. SR; onde $\overline{SP}^2$. $\overline{SO}^2$: : SP. SB (*N.* 393.), e per conseguente EDC. ELC : : SP. SR : : SNP. SNR; e dividendo EDC . ELC — EDC : : SNP. SNR — SNP, o EDC. LHCD : : SNP. RNP: ma EDC = SNP; dunque LHCD = RNP, cioè la parte LHCD equivale al triangolo RNP, ch'è il terzo del triangolo MNP, ovvero del trapezoide ABCD.

Piglio parimente una media proporzionale SZ infra SP ed SQ, quindi una quarta proporzionale ET alle quattro linee SP, SZ, ED; e tirando TV parallela alla base, la parte TVDC sarà i due terzi del trapezoide ABCD; ciò che provasi come sopra. Dunque levando la parte LHCD, che n'è pure il terzo, il residuo TVHL è 'l terzo, ed in conseguenza ABVT sarà il terzo rimanente.

437. PROBLEMA. *Da un triangolo* ABC (Fig. 279.) *levare un triangolo uguale al dato* DEF.

Cerco un triangolo HCL uguale al triangolo DEF e simile al triangolo ABC (*N.* 414.), e sottraendo l'uno dall'altro il residuo è ABLH.

Delle Figure Isoperimetre.

438. Due, o più figure, le quali hanno i perimetri, o circuiti uguali, diconsi *Isoperimetre*.

439. PROBLEMA. *Data una figura farne un'altra di diversa spezie, che le sia isoperimetra.*

Supponiamo, che s'abbia a fare un rettangolo isoperimetro al triangolo ABC (*Fig.* 281.) : congiugno i lati del triangolo in modo che formino la retta EL ; divido per mezzo questa linea in G, e poi ciascuna metà in due parti disuguali, facendo EF = HL ed FG = GH; finalmente prendo le due uguali EF, HL per formare le due basi superiore ed inferior d' un rettangolo MO, e le due FG, GH per formarne i lati: così 'l rettangolo MO è isoperimetro al triangolo APC.

440. COROLLARIO. Quindi chiaramente scorgesi, che nello stesso modo far si potrebbe un quadro, un poligono regolare, ec. isoperimetro al triangolo ABC.

441. PROBLEMA. *Dato un triangolo scaleno* ABC (Fig. 283.) *sopra la medesima base* AB *costruire un triangolo isoscele isoperimetro al triangolo* ABC.

Piglio AD uguale alla metà de' due lati AC, CB, e sopra la base AB faccio un triangolo ADB, i cui lati AD, BD sieno uguali.

442. PROPOSIZIONE XCVIII. *Fra tutt' i triangoli isoperimetri costruiti sopra una stessa base, l' isoscele è maggiore di quei, ch' isosceli non sono; e gli altri son tanto minori, quanto più sono disuguali i loro lati.*

Sia ABC (*Fig.* 284.) il triangolo isoscele sopra la base AB, ed ABE il triangolo isoperimetro ad ABC, ma non isoscele sopra la base. Prolungo AC in R, facendo AC = CR, e tiro la retta ER; nel triangolo AER i due lati AE, ER pres' insieme son maggiori di AR, o di AC, CB, o finalmente di AE + EB = AC + CB, poichè isoperimetri sono i due triangoli ACB, AEB, ed hanno la medesima base: così abbiamo AE + ER > AE + EB; e d' ambe le parti levando AE, abbiamo ER maggiore di EB. Ora, i triangoli BCE, ECR hanno il lato CE comune, e'l lato BC uguale al lato CR: ma la base BE è minore della base ER, come s'è veduto; dunque l'angolo BCE è minor dell' angolo ECR (*N.* 108.), e per conseguenza minore della metà dell' an-

angolo RCB: ma l'angolo RCB esterno al triangolo ABC equivalendo a' due interni opposti A ed ABC, che sono uguali, egli è doppio dell'angolo ABC; e tirando la retta CS parallela ad AB, l'angolo SCB equivale al suo alterno ABC, e vale in conseguenza la metà dell'angolo RCB; onde BCE è minor dell'angolo SCB, e conseguentemente'l vertice E del triangolo ABE cade sotto la parallela CS; così l'altezza del triangolo isoscele ACB è maggiore che quella del triangolo AEB: ma poichè questi due triangoli han la stessa base AB, sono fra essi come la loro altezza; il triangolo ACB è dunque maggiore del triangolo AEB.

Proveremo altresì, ch'il triangolo AFB, il qual' è isoperimetro al triangolo AEB, ma che ha i lati AF, FB più disuguali fra loro de' lati AE, EB, è minore del triangolo AEB, e così degli altri.

443. COROLLARIO. *Se due triangoli isosceli ed isoperimetri* ABC, AEC (Fig. 285.) *hanno un lato* AC *comune, quello ch' è isoscele sopra detto lato, cioè'l triangolo* ABC, *il quale ha i suoi due angoli uguali sopra* AC, *è maggiore di quello, ch' isoscele non è sopra detto lato, cioè del triangolo* AEC, *che ha i suoi angoli uguali sopra* CE, *e non sopra* AC.

Ciò dimostrasi come sopra; poichè'l triangolo AEC considerato per rapporto alla sua base AC è scaleno, mercè che disuguali sono i lati AE, EC, dove all'opposto'l triangolo ABC considerato per rapporto alla stessa base è isoscele.

444. PROPOSIZIONE XCIX. *Se due triangoli isoperimetri ed isosceli* AEC, ABC (Fig. 285.) *hanno un lato comune* AC, *quello, di cui è minore la differenza della base a ciascuno de' suoi lati uguali, è più grande di quello, la cui differenza della base a ciascuno de' suoi lati uguali è maggiore.*

Sia'l triangolo isoscele ACE, i cui lati uguali sono AE, AC, e la cui base si è EC, che noi supporrem maggiore del lato AE, od AC: se sopra AC far si volesse un triangolo isoperimetro al triangolo AEC, ed isoscele sopra AC, converrebbe de' due lati disuguali AE, EC farne due uguali AB, BC, e perciò prender la metà dell' eccesso di EC sopra AE, ed aggiugnerlo ad AC: così nel nuovo triangolo ABC il lato AB, o BC sarà maggiore di AC della metà dell'eccesso di CE sopra AE, od AC; e conseguentemente la differenza della base AC di questo nuovo triangolo al suo lato BC, o BA sarà minore di quello sia nel triangolo ACE la differenza della base CE al lato AC: ora, isoscele essen-

fendo'l nuovo triangolo ABG fopra 'l lato comune AG, egli è maggiore del triangolo AEG, ch' ifofcele non è fu quefto lato; dunque, ec.

Se nel triangolo AEC la bafe EC foffe minore del lato AE, od AG, fi proverebbe agevolmente lo fteffo.

445. PROPOSIZIONE C. *L'equilatero è'l maggiore di tutt' i triangoli ifoperimetri.*

Sia'l triangolo fcaleno ABC (*Fig.* 286.) : fopra la fua bafe AB faccio un triangolo ADB ifofcele, ed ifoperimetro ad ABC; e però ADB è maggiore di ACB (*N.* 442.). Sul lato AD del triangolo ifofcele ADB faccio un triangolo ifoperimetro ed ifofcele DEA, il quale, ifofcele effendo fopra DA, è maggiore di ADB, che fopra lo fteffo DA non è ifofcele (*N.* 443.); e la differenza della fua bafe AD a' fuoi lati AE, DE è minore di quello fia nel triangolo ADB la differenza della bafe AB a'fuoi lati AD, DB (*N.*444.). Sopra ED faccio parimente un triangolo EOD ifofcele, e ifoperimetro al triangolo DEA: così queft'ultimo triangolo EDO è maggiore del triangolo DEA, e la differenza della fua bafe a'fuoi lati è minore; poichè dunque, a mifura che la differenza della bafe a' fuoi lati va diminuendo, fempre maggiore diventa'l triangolo ifoperimetro, ne fegue, che quando nulla farà quefta differenza; cioè quando 'l triangolo ifoperimetro farà equilatero, egli farà'l maggiore di tutti gl' ifoperimetri.

Se prendefi un'altro triangolo fcaleno ifoperimetro al triangolo ACB ma di bafe differente, e che fi faccia lo fteffo raziocinio, troveremo, ch' il triangolo equilatero ifoperimetro a detto triangolo farà'l maggiore: ora, e'non può trovarfi ch'un fol triangolo equilatero ifoperimetro a più ifoperimetri; egli è dunque generalmente vero, che l'equilatero è 'l maggiore di tutt' i triangoli ifoperimetri, che hanno bafi uguali, o difuguali.

446. PROPOSIZIONE CI. *Il maggiore di tutti i parallelogrammi ifoperimetri, che hanno l'ifteffa bafe* AB (Fig. 287.), *fi è'l rettangolo* ADCB; *e gli altri fon tanto minori, quanto più acuti fono i loro angoli.*

Prefo per centro'l punto A, col raggio AD defcrivo un femicircolo MDN; e dallo fteffo punto tirando 'l raggio AE ad un punto della circonferenza E differente da D, termino 'l parallelogrammo AEGB ifoperimetro al rettangolo ADCB per effer comune la bafe AB e per effere il lato AE uguale al lato AD, mercè che fon raggi d' un' ifteffo circolo. Ora, D effendo 'l punto

della

della circonferenza il più distante dal diametro MN, l'altezza AD del rettangolo ADCB è maggiore dell'altezza EF del parallelogrammo AEGB; il rettangolo è dunque maggiore del parallelogrammo, imperocchè avendo queste figure la stessa base sono fra lor come le loro altezze.

Se sopra la circonferenza prendesi un punto H più distanre da D ch'il punto E, e che tirato'l raggio AH si termini'l parallelogrammo AHLB, si mostrerà facilmente, esser questo minore del parallelogrammo AEGB; e così degli altri.

447. PROPOSIZIONE CII. *Il maggiore di tutt'i rettangoli isoperimetri si è'l quadrato* ABCD (Fig. 288.) , *e gli altri sono tanto minori, quanto più son disuguali i loro lati.*

Dall'altezza AB levo la parte BR; alla base AD aggiugno la parte AE uguale a BR; e terminando'l rettangolo EFHD, il quadro ABCD è isoperimetro al rettangolo EFHD, che ha guadagnato sopra la lunghezza della base, ciò che ha perduto sopra l'altezza. Ora, uguali essendo le basi BR, EA de' rettangoli BRHC, EARF, detti rettangoli sono fra essi come le loro altezze RH, AR, ed RH è maggior di AR; onde'l rettangolo BRHC è maggiore del rettangolo EARF, ed aggiugnendo la parte comune ARHD, abbiamo ABCD maggiore di EFHD; il che doveasi 1°. dimostrare.

Dall'altezza AR, od EF del rettangolo EFGD levo una parte FN, ed alla sua base ED aggiugno una parte ES uguale ad FN: così terminando'l rettangolo STVD, egli sarà isoperimetro al rettangolo EFHD. Ora, uguali essendo le basi FN, SE de'rettangoli FNHV, TNES, essi sono fra lor come le loro altezze FH, EN, ed FH è maggiore di EN; dunque'l rettangolo FNHV è maggiore del rettangolo TNES; e a ciascuno di essi aggiugnendo la parte comune ENVD, il rettangolo EFHD è maggiore del rettangolo STVD, i cui lati son più disuguali. Il che doveasi 2°. dimostrare.

448. PROPOSIZIONE CIII. *Se due triangoli rettangoli* ABC, RCD *sono simili* (Fig. 289.) ; *dico, ch'il quadrato d'una linea composta delle due ipotenuse* BC, CD *equivale al quadro d'una linea composta de'due lati omologhi* AB, CR, *più al quadrato d'un altra linea composta degli altri due lati omologhi* AC, RD.

Congiugno in diritto l'ipotenuse BC, CD, e a motivo dell'angolo ABC, uguale all'angolo RCD, parallele sono le linee AB, RC non meno che le linee AC, RD, a cagione degli angoli uguali

li ACB, RDC. Prolungo BA fino al concorso di DR prolungato in P: così le rette AC, PR parallele fra le parallele BP, CR son' uguali; e per la stessa ragione lo sono ancora le rette AP, CR, e'l triangolo BPD è rettangolo; dunque $\overline{BD}^2 = \overline{BP}^2 + \overline{PD}^2$, cioè'l quadrato della linea BD uguale alle due ipotenuse equivale al quadro della linea BP, o BA + RC, più 'l quadro della linea PD, od RD + AC.

449. PROBLEMA. *Dati due triangoli isosceli* ABC, CDE *di basi disuguali, e dissimili fra loro* (Fig. 290.) *costruire sopra le medesime basi due altri triangoli isosceli e simili fra loro* AHC, CRE, *i cui quattro lati* AH, HC, CR, RE *presi insieme equivagliano ai quattro* AB, BC, CD, DE *de' dati triangoli presi altresì insieme.*

Congiungo in diritto i lati AB, CD de'dati triangoli; in S divido la somma MN nella stessa ragione che la somma AE delle lor basi lo è in C; piglio due rette uguali ciascuna alla parte maggiore MS, e con esse e colla base maggiore AC costruisco un triangolo isoscele AHC. Prendo pure due linee uguali ciascuna alla parte minore SN, e con queste due linee e la base minor CE costruisco un triangolo isoscele CRE: così i due triangoli isosceli AHC, CRE son simili, poichè abbiamo AH . CR : : MS. SN : : AC. CE; e di più i lor quattro lati presi insieme equivagliono ai quattro de' dati triangoli, imperocchè abbiamo AH + CR = MS + SN = MN = AB + CD.

450. PROPOSIZIONE CIV. *Dati due triangoli isosceli* ABC, CDE *dissimili sopra basi uguali, o disuguali* AC, CE (Fig. 291.), *se sopra le stesse si costruiscono due triangoli isosceli* AHC, CRE *simili fra loro, ed i cui quattro lati* AH, HC, CR, RE *sieno insieme uguali ai quattro* AB, BC, CD, DE *de' dati triangoli; dico, ch' i due triangoli simili* AHC, CRE *pres' insieme saranno maggiori de' due* ABC, CDE *presi altresì insieme.*

Da' vertici H, D abbasso le perpendicolari HP, DQ, che passeranno per gli altri vertici B, R, poichè isosceli sono i quattro triangoli sopra le basi AC, CE; prolungo la perpendicolare DQ del maggiore de' due dati triangoli facendo QL = DQ; dal vertice B dell'altro triangolo dato tiro la retta BL, e dal punto L la retta LC. Così, avendo i due triangoli rettangoli CQD, CQL il lato CQ comune, e'l lato DQ uguale a QL, sono perfettamente uguali, e per conseguenza noi abbiamo LC = CD, e BC + CL = BC

+

$+ CD = HC + CR$. Ora nel triangolo BCL essendo i due lati BC, CL presi insieme maggiori del lato BL, il quadrato d' una linea composta de' due BC, CL, o de' due HC, CR è dunqne maggiore del quadro BL, e conseguentemente abbiamo $\overline{HC + CR}^2 > \overline{BL}^2$.

Simili essendo i triangoli rettangoli HPG, RQG, a motivo dell' angolo acuto HCP uguale all'angolo acuto RCQ, il quadrato d' una linea composta delle loro ipotenuse HC, CR equivale al quadro d' una linea composta de' due lati HP, RQ, più 'l quadrato della linea PQ composta degli altri due lati PC, CQ (*N.* 448.); perciò noi abbiamo $\overline{HC + CR}^2 = \overline{HP + RQ}^2 + \overline{PQ}^2$.

Così pure, simili essendo i triangoli rettangoli PBS, SLQ, il quadro della linea BR composta delle due ipotenuse BS, SL equivale al quadrato di una linea composta de' due lati BP, QL, o QD, più 'l quadro della linea PQ composta degli altri due PC, CQ, e per conseguenza $\overline{BL}^2 = \overline{BP + QD}^2 + \overline{PQ}^2$: ora noi abbiam ritrovato $\overline{BL}^2$ minore di $\overline{HC + CR}^2$; dunque $\overline{BP + QD}^2 + \overline{PQ}^2$ è minore di $\overline{HC + CR}^2$, o del suo uguale $\overline{HP + RQ}^2 + \overline{PQ}^2$; onde, levando $\overline{PQ}^2$ d'ambe le parti, avremo $\overline{BP + QD}^2$ minore di $\overline{HP + RQ}^2$; però, dall'una e dall' altra parte estraendo la radice quadra, avremo $BP + QD$ minore di $HP + RQ$, cioè l' altezze de' due triangoli dissimili sono insieme minori dell' altezze de' due triangoli simili; donde n' avviene, che l' eccesso HB dell' altezza HP del triangolo AHC sopra l' altezza BP del triangolo ABC è più grande dell' eccesso DR dell' altezza DQ del triangolo CDE sopra l'altezza RQ del triangolo CRE. Ciò posto.

Il triangolo ABC è $\frac{1}{2}AC \times PB$, il triangolo CDE è $\frac{1}{2}CE \times DQ$ (*N.* 375.), e la lor somma è $\frac{1}{2}AC \times PB + \frac{1}{2}CE \times DQ$: per l'opposto, il triangolo AHC è $\frac{1}{2}AC \times \overline{PB + BH}$, il triangolo CRE è $\frac{1}{2}CE \times \overline{QD - DR}$, e la lor somma è $\frac{1}{2}AC \times \overline{PB + BH} + \frac{1}{2}EC \times \overline{QD - DR}$; onde, paragonando questa alla precedente somma $\frac{1}{2}AC \times PB + \frac{1}{2}CE \times DQ$, egli è facile vedere, ch'il triangolo AHC guadagna sopra 'l triangolo ABC una quan-

tità $\frac{1}{2}$AC × BH maggiore della quantità $\frac{1}{2}$EC × DR, cui 'l triangolo CRE perde per rapporto al triangolo CDE, poichè $\frac{1}{2}$AC è maggiore di $\frac{1}{2}$CE, e BH di DR; dunque i due triangoli simili AHC, CRE pres' insieme son maggiori dei dissimili ABC, CDE.

451. PROPOSIZIONE CV. *La massima fra tutte le Figure isoperimetre d' uno stesso numero di lati si è l' equilatera, e l' equiangola.*

Sia la Figura di cinque lati ABCDE (*Fig.* 292.) non equilatera, i cui lati disuguali sono EA, AB; tiro la retta EB, e sopra questa base faccio un triangolo isoscele ERB, i cui due lati ER, RB pres' insieme sieno uguali ai lati EA, AB presi altresì insieme: così 'l triangolo ERB è maggior del triangolo EAB (*N.* 242.); ed aggiugnendo la parte comune EDCB, la Figura REDCB è maggiore della Figura AEDCB. Dunque la Figura irregolare ne' suoi lati non è la maggior delle Figure isoperimetre d' uno stesso numero di lati.

Sia dunque la Figura ABCDE (*Fig.* 293.) regolare ne' suoi lati, ma con angoli disuguali EDC, EAB; tiro le rette EC, EB, e sopra le stesse prese per basi facendovi due triangoli isosceli simili ERC, EHB, i cui quattro lati sieno insieme uguali a' quattro lati de' triangoli EDC, EAB, i due ERC, EHB sono insieme maggiori dei due EDC, EAB (*N.* 450.); e ad ambe le parti aggiugnendo la parte comune EBC, la Figura ERCH è maggior della figura EDCBA. Dunque la Figura irregolare ne' suoi angoli non è la maggiore delle Figure isoperimetre d' un medesimo numero di lati.

Ora, fra tutte le figure isoperimetre d'un'istesso numerò di lati, necessariamente conviene, ch' una ve ne sia di più grande, mercè che non può un dato perimetro chiudere uno spazio, che sempre divenga maggiore; ed abbiamo già trovato, che tutte quelle, che regolari non sono, esser non potrebbero le maggiori; dunque la Figura regolare ne' suoi lati e ne' suoi angoli è la maggior di tutte.

452. FROPOSIZIONE CVI. *Se dato un' angolo retto* ABC (Fig. 294.) *dividesi l' uno de' suoi lati* BA *in parti uguali* BD, DE, EF, ec. *e che da ciascun punto di divisione si tirino delle rette* DC, EC, FC, ec. *a qualsivoglia punto* C *dell' altro lato* BC; *io dico, che gli angoli* DCB, ECB, FCB, ec. *andran diminuendo, a misura che si allontaneranno dal primo* DCB.

Preso per centro 'l punto C, coll' intervallo CD descrivo un' arco di circolo, che seghi le linee vicine a CD, l' una in R, e l' altra

altra in H: così, essendo l'inclinata CD maggior della perpendicolare CB, ho GH = CD maggiore di CB; ed essendo l'obbliqua CE maggior dell'obbliqua CD, ch'è più vicina alla perpendicolare CB, ho CR = CD minore di CE: ora, comune essendo l'altezza CB, ed uguali le basi DB, DE de'triangoli CDB, CED, essi sono fra loro uguali, e'l settore CDH è maggior del triangolo CDB, là dove'l settore CRD è minor del triangolo CED; dunque il settore CDH è maggior del settore CRD: ma questi due settori sono come i loro archi DH, DR, o come gli angoli DCH, DCR, che vengon misurati da quest' archi; onde l'angolo DCH è maggiore dell'angolo DCR; e nello stesso modo si proverà, che l'angolo FCE è minor dell'angolo ECD.

453. COROLLARIO. *Dunque gli angoli* DCB, ECD, FCE, *ec. non sono in ragione delle basi* DB, ED, FE, *ec. de' triangoli* DCB, ECD, ec.

Imperocchè queste basi sono uguali, e gli angoli all'opposto van diminuendo.

454. PROPOSIZIONE CVII. *Se due poligoni regolari* ABCDE, FGHLMN (Fig. 295.) *di differenti spezie sono isoperimetri; il lato* AB *del primo è al lato* FG *del secondo, reciprocamente come'l numero de' lati del secondo è al numero de' lati del primo; e l' angolo al centro* AOP *è all' angolo al centro* FPG, *nella stessa ragione ch' il lato* AB *è al lato* FG, *cioè ancora reciprocamente come'l numero de' lati del secondo al numero de' lati del primo.*

Il lato AB è la quinta parte del perimetro ABCDE, e'l lato FG n'è la sesta del perimetro FGHLMN: ma questi due perimetri sono uguali; dunque AB è ad FG, come $\frac{1}{5}$ è ad $\frac{1}{6}$; e riducendo queste frazioni allo stesso denominatore, il che ci darà $\frac{6}{30}$ e $\frac{5}{30}$, avremo AB ad FG come $\frac{6}{30}$ a $\frac{5}{30}$, o come *6* a 5, cioè come'l numero *6* de' lati del secondo è al numero 5 de' lati del primo.

Parimente, perchè tutti gli angoli al centro d'un poligono equivagliono a quattro retti, l'angolo al centro AOB è la quinta parte di quattro retti, e l'angolo al centro FPG n'è la sesta; onde questi due angoli sono fra loro, come $\frac{1}{5}$ è ad $\frac{1}{6}$, o come $\frac{6}{30}$ a $\frac{5}{30}$, o pure come *6* a 5, ed in conseguenza nella stessa ragione di AB ad FG, ovvero del numero degli angoli del poligono FGHLM al numero di quelli del poligono ABCDE.

455. PROPOSIZIONE CVIII. *Dati due Poligoni regolari isoperimetri, ma di differenti numeri di lati, il massimo è quello, che ha un numero di lati maggiore.*

Sia'l pentagono regolare ABCDE (*Fig. 296.*) isoperimetro all' esagono regolare FGNTVM; il lato AB del pentagono è dunque al lato FG dell' esagono come *6* a 5 (*N.* 454.) , e conseguentemente, se'l lato AB è diviso in *6* parti uguali, il lato FG ne conterrà cinque. Prendo la metà d'una di queste parti, ch'io porto da A in H, poi l'altra metà, ch'io porto da B in L, e tiro le linee HO, LO, e l'apotema OQ: così, poichè AB contiene *6* parti uguali, e doppie ciascuna della parte AH, la linea AQ, ch'è la metà di AB, conterrà *6* metà di queste parti uguali, cioè *6* parti uguali ad AH; se dunque si concepisce, che AQ sia divisa in queste *6* parti uguali, e che da ciascun punto sieno tirate delle rette al punto O, il triangolo AOQ sarà diviso in *6* triangoletti uguali ciascuno al triangolo AOH: ma siccome gli angoli al vertice O di questi sei triangoli andran diminuendo, a misura che le lor basi s'allontaneranno da OQ (*N.* 452.) , così l' angolo AOH sarà minore della sesta parte dell'angolo AOQ. Per la medesima ragione, l'angolo BOL uguale ad AOH sarà altresì minore della sesta parte di QOL; perciò l'angolo HOL sarà maggiore dei cinque sesti dell' angolo AOB, cioè HOL sarà maggiore rapporto all' angolo AOB di quello sia 5 rapporto a *6*. Ora FRG è all'angolo AOB, come 5 a *6*; onde l'angolo HOE sarà maggiore di FRG, ed in conseguenza nel triangolo isoscele HOL i due angoli sopra la base OHL, OLH saran minori dei due RFG, RGF sopra la base del triangolo isoscele RFG. Facendo dunque sopra FG due angoli SFG, SGF uguali ai due OHL, OLH, egli è per se evidente, ch' essendo i due lati FS, SG più inclinati sopra la base che i due FR, GR, si segheranno in un punto S più vicino alla base ch' il punto R, in cui si segano i due FR, GR; e però il triangolo FSG avrà l' altezza SP minore dell' altezza RP del triangolo FRG: ma simili essendo ed uguali i triangoli HOL, FSG, essi hanno l' altezze uguali OQ, SP; dunque OQ è minore di RP. Ora, il pentagono ABCDE equivale al prodotto del suo perimetro moltiplicato per la metà del suo apotema OQ (*N.* 377.) , e l' esagono FGNTVM al prodotto del suo moltiplicato per la metà del suo apotema; onde, per l'egualità de'due perimetri, questi due poligoni sono fra lor come la metà de'loro apotemi, o come i loro apotemi; e per conseguenza il pentagono è minore dell' esagono, che ha più lati di lui. Lo stesso si proverà rispetto agli altri due poligoni regolari isoperimetri di differenti numeri di lati.

456. COROLLARIO. *Essendo'l circolo quello, che fra tutt'i Poli-*

ligoni regolari contiene un maggior numero di lati, ne segue, ch' egli è 'l maggiore di tutt' i Poligoni regolari isoperimetri.

457. AVVERTIMENTO. Da quanto s'è detto circa le Figure isoperimetre puossi agevolmente conchiudere, che fra tutt' i Magazzini, che si costruiscon nelle Piazze per le munizioni sì da guerra che da bocca, i quadri assai più contengono di quei, che son fatti in quadrato lungo, posto lo stesso perimetro; ed i circolari son quelli, che contengono più di ciascun' altro. In favore di quest' ultimi potremmo eziandio aggiugnere, che la Figura de' loro coperti li preserva molto più di tutti gli altri dall' urto diretto delle Bombe.

CAPITOLO DECIMO.

Della Stereometria, o Misura de' Solidi, delle loro Superficie, e de' lor rapporti.

Delle differenti posizioni delle Linee riguardo a' Piani, e di quelle de' Piani fra loro.

458. DIcesi, ch' una retta linea è *sopra un Piano*, quando tutte le sue parti sono nello stesso Piano.

459. *Se due punti* R, S (Fig. 297.) *d' una retta sono sopra un Piano* ABCD, *tutte le parti di detta linea, prolungata ancora in infinito, saranno nello stesso piano, prolungato parimente in infinito.*

Dal punto R pel punto S tirisi nel piano ABCD la retta RS; il ch' è possibile, poichè le parti di questo piano non sono l' une più, o meno sollevate dell' altre; così detta linea RS avrà tutt' i suoi punti sul piano: ma da R ad S può può tirarsi ch' una sola retta; ond' egli è impossibile, ch' un' altra linea, la quale sul piano ABCD ha i punti R, S, abbia alcuni de' suoi punti fra R ed S, i quali non sieno sopra 'l medesimo piano; ed è per se manifesto, che se d' ambe le parti si prolunga la retta RS in X e Z, tutt' i punti di detta linea saranno ancora sul piano ABCD, prolungato se sia d' uopo.

460. *Le due rette* AB, CB, *che si segano in* B (Fig. 298.), *sono in un medesimo piano.*

Tiro la retta AC, e facendola sempre muover parallela a se stessa

ſteſſa fino in B, lungo la retta AB, ella col ſuo moto deſcrive una ſuperficie ACEB: ora, i punti C, B della retta BC ſono in queſta ſteſſa ſuperficie; onde tutta la linea BC è nel piano ACEB, come lo è pure la linea AB.

461. *Dunque le tre linee d' un triangolo* ABC *ſono in un medeſimo piano.*

462. Una linea, la quale ha uno ſolo de' ſuoi punti in un piano prolungato ancora in infinito, è detta perpendicolare ſopra eſſo piano, quando è ugualmente inclinata verſo tutt' i lati del medeſimo.

463. *Se una linea* AB (Fig. 299.) *è perpendicolare ſopra due linee* TN, SR, *che ſono in un medeſimo piano* CDEF, *e che ſi ſegano in* A; *dico, che la ſteſſa è perpendicolare al detto piano.*

Sopra le linee TN, SR piglio delle parti uguali AS, AT, AR, AN: ora, eſſendo AB perpendicolare a TN ed SR, le rette BS, BR, BT, BN tirate dal vertice A all'eſtremità di queſte quattro parti ſaranno fra loro uguali: così, conducendo nel piano le rette ST, NR, i triangoli SBT, NBR ſaranno fra loro uguali, ſiccome lo ſono anche i triangoli iſoſceli SAT, NAR, i quali hanno gli angoli al vertice uguali; pel punto A tiro nel piano una retta PQ, che vada a terminare ſopra le rette ST, NR; poichè i due triangoli PAT, NAQ hanno l' angolo PTA uguale all'angolo NAQ, che gli è oppoſto al vertice, l'angolo PTA uguale all'angolo ANQ, a cagione de' due triangoli SAR, NAR iſoſceli ed uguali, e 'l lato TA uguale al lato AN, ſono ſimili, ed eguali; onde PT = NQ, PA = AQ. Parimente, poichè i triangoli PTB, QNB hanno il lato PT uguale al lato NQ, il lato TB uguale al lato NB, e l'angolo contenuto PTB uguale all' angolo contenuto QNB, a cagione de'triangoli iſoſceli uguali SBT, NBR, ſon perfettamente uguali. Dunque PB = BQ; ed in conſeguenza, per eſſere PA = AQ, anche la linea AB è perpendicolare ſopra PQ. Così ancora proveremo, che AB è altresì perpendicolare a tutte le linee tirate dal punto A; ond'eſſa è perpendicolare al piano.

464. *Da uno ſteſſo punto* A (Fig. 299.) *puoſſi ſopra un medeſimo piano alzare una ſola perpendicolare* AB; perocchè qualunque altra inclinerà neceſſariamente più dall' uno che dall'altro lato.

465. *Se due, o più linee ſon perpendicolari ad un medeſimo piano, elle ſaranno fra lor parallele.*

Sieno le linee AB, EF, CD (*Fig.* 300.) perpendicolari al piano MNOP: Per le loro eſtremità conduco le rette AE, EC, AC,

AG, e faccio muovere la linea AB ſempre parallela a ſe ſteſſa, lungo la retta AE: ora, ſiccome in queſto moto eſſa non inclina più dall'uno che dall'altro lato, egli è evidente, che giunta in E ſarà parimente perpendicolare al piano, e perciò caderà ſopra la EF; perchè altrimenti ſi potrebbero dal medeſimo punto E alzare ſopra lo ſteſſo piano due perpendicolari, il che è impoſſibile (*N.* 464.). Agevol coſa ſarebbe eziandio provare, che facendo avvanzar la linea EF ſempre parallela a ſe ſteſſa, lungo la retta EC, giunta in C caderà ſopra CD, e che facendo muover CD lungo la retta CA, giunta in A caderà ſopra AB; dond'egli è facile conchiudere, che le tre linee AB, EF, CD ſon parallele.

466. *Quindi ne ſegue, che due linee parallele* AB, EF *ſono in un medeſimo piano.*

Perocchè tirando la linea AE, che congiugne le loro eſtremità, poi facendo muover la linea AB ſempre parallela a ſe ſteſſa lungo la retta AE, giunta in E, poſto che ſia parallela ad EF, dee cadere ſopra EF: ma AB durante queſto moto deſcriverà un piano; dunque EF ſarà in detto piano.

467. *Quindi ne ſegue ancora, che ſe due, o più linee ſono fra lor parallele, e che l'una di eſſe ſia perpendicolare ad un piano, lo ſaranno anche l'altre.*

468. *Se tre linee uguali* AB, CD, EF (Fig. 301.) *ſono perpendicolari ad un piano, e ch'i loro termini* A, E, C *non ſieno in retta linea, il piano, che paſſerà per i termini ſuperiori* B, F, D, *ſarà parallelo al piano* MNOP.

Nel piano MNOP tiro le rette AE, EC, AC. Perpendicolari eſſendo al medeſimo piano MNOP le linee AB, EF, ſono fra lor parallele (*N.* 465.), e poichè ſon' uguali, ſono altresì parallele ed uguali le rette AE, BF: per la ſteſſa ragione lo ſono anche le rette EC, FD, non meno che le due AC, BD; eſſendo dunque i tre lati del triangolo BFD paralleli ciaſcuno a ciaſcuno a'tre lati del triangolo AEC, queſti due triangoli ſon paralleli; e in conſeguenza il triangolo BFD è parallelo al piano MNOP.

469. *Se una linea* AB (Fig. 302.) *è perpendicolare a due piani* MNOP, RHTX, *eſſi ſon paralleli.*

Pel punto A tiro nel piano MNOP la retta AG, e venendo la retta AB a muoverſi ſempre parallela a ſe ſteſſa, lungo la retta AC, è ſempre perpendicolare ſopra'l piano MNOP, e'l ſuo termine B deſcrive una retta BS, ſu cui anche AB è ſempre perpendicolare: ora io dico, che BS dee eſſere nel piano RHTX, perchè

chè altrimenti questo piano segherebbe la retta CS in qualsivoglia altro punto E: così, in questo stesso piano conducendo la retta BE, necessariamente la retta CS perpendicolare ad SB sarebbe obbliqua sopra BE, e per conseguenza sopra 'l piano RHTX; il che è contro l' ipotesi.

470. *Se due piani sono fra lor paralleli, tutte le perpendicolari tirate fra detti due piani saranno uguali*. Il ch'è manifesto, perocchè i due piani sono sempre in egual distanza, e le distanze misuransi dalle perpendicolari.

471. PROBLEMA. *Da un dato punto* A (Fig. 303.) *fuori d' un piano* MNOP *tirar' una perpendioolare sopra lo stesso piano.*

Conduco nel piano qualsivoglia linea RQ; dal dato punto A tiro sopra detta linea una perpendicolare AS; dal punto S conduco nel piano MNOP una retta ST perpendicolare ad RQ, e da A tiro sopra ST la perpendicolare AT, che sarà perpendicolare al piano MNOP.

Poichè, essendo la retta RS perpendicolare sopra i due lati TS, SA del triangolo TSA, è in conseguenza perpendicolare sopra detto triangolo (*N.* 463.): così, conducendo nel piano MNOP la retta XT perpendicolare a TS, per essere la retta XT parallela ad RS, ella sarà parimente perpendicolare al triangolo TSA (*N.*467.), e però al lato TA del medesimo triangolo; essendo dunque TA perpendicolare ad XT, come lo è pure a TS per la costruzione, ed essendo XT, TS in un medesimo piano MNOP; ne segue, che TA è perpendicolare sopra 'l piano (*N.* 463.).

472. PROBLEMA. *Da un dato punto* T *sopra un piano* MNOP (Fig. 304.) *alzar' una perpendicolare a detto piano.*

Da qualsivoglia punto A preso fuori del piano tiro una perpendicolare AS; poi dal punto T conducendo TX parallela ad SA, la stessa TX sarà pure perpendicolare al piano (*N.* 467.).

473. Se una linea retta è inclinata ad un piano, l' angolo minore, ch' essa fa col medesimo, dicesi *Angolo d' inclinazione* della linea al piano.

474. PROBLEMA. *Essendo una linea* AB (Fig. 305.) *inclinata ad un piano* MNOP, *ritrovare 'l suo angolo d' inclinazione ad esso piano.*

Dall' estremità B di detta linea tiro sul piano la perpendicolare BC; e dal punto C conducendo nel piano la retta AC, BAC è l' angolo d' inclinazione; il che io così dimostro.

Facendo centro in A, col raggio AC descrivo nel piano MNOP il

il circolo CDEHS, e dal punto A concepisco, che sieno alla circonferenza tirat' infiniti raggi AD, AE, AH, ec. i quali tutti colla retta BA formeranno differenti angoli BAD, BAE, ec. Tiro la retta BD, e'l triangolo BCD sarà rettangolo; poichè essendo la BC perpendicolare a MNOP, lo è eziandio alle rette AC, CD, che sono nell' istesso piano, e che passano pel punto C: così BD è maggiore di BC. Ora, i triangoli ABC, ABD hanno il lato AB comune, e'l lato AC uguale al lato AD, poichè amendue sono raggi d'un medesimo circolo: ma la base BC dell'uno è minor della base BD dell'altro; dunque l'angolo BAC è minore dell'angolo BAD (*N.* 109.). Colla stessa dimostrazione si proverà, che l'angolo BAE è maggior dell'angolo BAC; e così degli altri. Onde, essendo l'angolo BAC il minore degli angoli, che risultano dalla linea BA colle linee tirate dal punto A nel piano MNOP, egli è l' angolo d' inclinazione della linea BA ad esso piano.

475. Quindi ne segue 1°. *Che l'angolo* BAH, *il qual' è l'angolo conseguente dell'angolo d'inclinazione* BAC, *è 'l maggiore di tutti gli angoli, che risultano dalla linea* BA *col piano*. 2°. *Che di tutti gli angoli, che sono fra 'l maggiore* BAH *e 'l minore* BAC, *quei, che al maggior più s'avvicinano, son maggiori di quelli, che più se n'allontanano; e finalmente, che si posson sempre trovare due angoli uguali, minori di* BAH *e maggiori di* BAC, *ma giammai tre.*

Tiro la retta CE nel piano, e la retta EB al vertice B della perpendicolare: così 'l triangolo EBC sarà rettangolo non meno ch' il triangolo DCB: ma poichè questi due triangoli hanno 'l lato BC comune, e'l lato CD minore del lato CE, per essere l' arco CD minore dell'arco CE, n'avviene; ch' il lato EB del triangolo rettangolo EBC è maggiore del lato BD del triangolo rettangolo BDC: ora, avendo i triangoli ABE, ABD il lato AB comune, il lato AE uguale al lato AD, e la base EB maggiore della base BD, egli è manifesto, che l'angolo BAE, il quale più si discosta dall'angolo d'inclinazione BAC, è maggiore dell'angolo, che meno se n'allontana; e collo stesso ragionamento si proverà, che l'angolo BAH, cioè l'angolo conseguente dell'angolo d'inclinazione BAC è 'l maggiore di tutti quei, che risultano dalla linea AB co'raggi tirati dal centro sopra la semicirconferenza HEC: quanto poi a quelli, che risulteranno dalla medesima linea AB co' raggi tirati dal centro sopra l'altra semicirconferenza HSC, agevol fia pro-

vare, ch'essi saranno uguali ciascuno a ciascuno a quei formati co' raggi della semicirconferenza HEC.

476. *Quindi ne segue ancora, che l'angolo* BAC *d'inclinazione d'una linea* BA *sopra un Piano trovasi in un Piano* BAC *perpendicolare al piano* MNOP.

Poichè, essendo la linea BC perpendicolare al piano MNOP, il triangolo ABC, in cui trovasi la retta BC, è ancora perpendicolare a detto piano.

477. *Se due piani* ABCD, EFGH *si segano* (Fig. 306.), *la loro comun sezione è una retta*.

Altro non è 'l piano ABCD che la somma de' suoi elementi DC, RX, RX, ec. siccome altro non è 'l piano EFGH che la somma de' suoi FG, SZ, SZ, ec. Onde, quando questi piani vengono a segarsi, gli elementi dell'uno segan quei dell'altro: ora gli elementi essendo tante linee, si segano in un sol punto; perciò la sezione de' due piani è una serie di punti M, O, O, O, ec. N, e conseguentemente una linea: ma considerata questa linea risguardo al piano ABCD, non è in alcuna delle sue parti più o meno sollevata dal lato di G che da quello di F, e considerata riguardo al piano EFGH, non è più o meno sollevata in alcuna delle sue parti dal lato di C che da quello di D; però la comun sezione dee per necessità essere una retta linea.

478. *Se due piani* ABCD, EFGH, *che si segano* (Fig. 307.), *sono perpendicolari ad un piano* MNOP, *la loro comun sezione* RS *è perpendicolare a detto piano*.

Poichè, considerata RS risguardo al piano ABCD perpendicolare sopra MNOP, essa più non inclina al piano MNOP dal lato di E che da quello di H, e per conseguenza è perpendicolare ad EH: così pure, considerata RS risguardo al piano EHGF perpendicolare ancora sopra MNOP, ella più non inclina dal lato di A che da quello di B; onde, essendo RS perpendicolare alle due linee EH, AB, che son nel piano MNOP, essa è perpendicolare a detto piano (*N.* 463.).

479. *Se i lati* AB, EC (Fig. 308.) *d'un' angolo* ABC, *che trovasi in un piano* ABC, *sono paralleli a' lati* DE, EF *di un'altro* DEF, *che trovasi in un'altro piano* DEF; *detti due angoli* ABC, DEF *son' uguali*.

Colla retta BE congiungo i vertici, e facendo avvanzare l'angolo ABC, in modo che sia sempre parallelo a se stesso, il lato

AB

AB cade neceſſariamente ſulla ſua parallela DE, e 'l lato BC ſopra la ſua BC; e però i due angoli ſono uguali.

480. *L'angolo d' inclinazione di due piani* ABED, BEFG (Fig. 309.), *che ſi ſegano, è dovunque lo ſteſſo.*

Supponiamo, che l'angolo ABC ſia l'angolo d' inclinazione de' due piani dal lato di B; tiro all'eſtremità E della comun ſezione BE, e nel piano ABDE una retta ED parallela ad AB. Conduco parimente nel piano BEFC una retta EF parallela a BC: così, facendo muovere l'angolo ABC ſempre parallelo a ſe ſteſſo lungo la BE, egli caderà in fine ſopra l'angolo DEC, e li ſarà uguale: ma 'l piano, che durante 'l ſuo moto ſarà deſcritto dalla gamba AB, ſarà lo ſteſſo ch' il piano ABED, e quello deſcritto dall' altra BC ſarà 'l medeſimo del piano BCFE; onde l'angolo d' inclinazione di queſti due piani è dovunque lo ſteſſo.

481. PROBLEMA. *Trovar l'angolo d' inclinazione di due piani* ABED, BCEF (Fig. 309.), *che ſi ſegano.*

Da qualunque punto O preſo ſopra la comun ſezione BE tiro nel piano ABED la retta OR perpendicolare ſopra BE, e nel piano BCFE la retta OH altresì perpendicolare ſopra BE; e l'angolo ROH ſarà l'angolo d' inclinazione, che ſi cercava.

Poichè la maggiore, o minor' inclinazione de' due piani tra loro conſiſte unicamente nella maggiore, o minor diſtanza, ch'eſſi conſervano fra ſe; dunque i lati RO, OH dell' angolo, che miſura queſt' inclinazione, non debbono più, o meno avvicinarſi di quello facciano nel verſo de' piani, e non debbono in conſeguenza inclinare nè dal lato di B, nè da quello di E.

482. *Se due piani paralleli* ABCD, EHFG (Fig. 310.) *ſono ſegati da un terzo* MON, *le due ſezioni* RS, PQ *ſon parallele.*

Altrimenti le due ſezioni da un lato s'avvicinerebbono, e dall' altro s'allontanerebbero; dunque lo ſteſſo avverrebbe de' due piani, a cui eſſe ſpettano, e però non ſarebbon più paralleli; il che è contro l'ipoteſi.

Quindi n'avviene, che *ſe 'l piano* MON, *il quale ſega i due piani paralleli, è un triangolo, i lati* MO, NO *di detto triangolo ſaran tagliati proporzionalmente dalle ſezioni* RS, PQ, *poſto però, che* MN *ſia parallela ad* RS; *il ch' è manifeſto.*

483. Se tre angoli piani BAC, CAD, DAB (*Fig.* 311.), che trovanſi in tre differenti piani, hanno 'l vertice A comune, e ch' i loro lati s'adattino; eſſi formano un'angolo in A, ch' appel-

dasi *Angolo solido*: tali sono tutti gli angoli de' corpi, le cui facce vanno a terminare in punta.

484. Per formare un'angolo solido se ne ricercano almeno tre di piani; poichè egli è manifesto, che se fra i due angoli piani BAD, BAC non se ne trovasse un terzo CAD, essi sarebbero in un medesimo piano.

485. *Se un'angolo solido* A (Fig.312.) *è formato da' tre angoli piani* SAM, MAN, NAS, *due di essi saranno maggiori del rimanente.*

Imperocchè, se l'angolo SAN è maggiore degli altri due, nel piano di detto angolo formo l'angolo SAR uguale ad SAM; e in conseguenza l'angolo rimanente RAP è maggiore dell'angolo NAM. Sopra la gamba AM dell' angolo SAM piglio la parte AC, e faccio AR = AC; da C tiro la retta CB, che lega l' altra gamba SA dell'angolo SAM in un punto qualunque B; da B pel punto R tiro la retta BR, che sega la retta AN in P, e da P pel punto C tiro la retta CP; ciò che mi dà 'l triangolo BCP, il qual serve di base all'angolo solido A.

I triangoli BAC, BAR son perfettamente uguali, a cagione di BA comune, di AC = AR, e dell'angolo contenuto BAC uguale all'angolo contenuto BAR; dunque BC uguale a BR. Ora, i triangoli RAP, PAC hanno il lato AR uguale ad AC, e'l lato AP comune: ma l'angolo RAP è maggiore dell'angolo PAC per ipotesi; dunque la base RP è maggior della base PC; e però BR + RP, o BP è maggiore di BC + CP; il ch' è impossibile, perocchè in qualsivoglia triangolo BPC un sol lato BP è sempre minore degli altri due. Ond' egli è parimente impossibile, che l'angolo BAP sia maggiore della somma degli altri due BAC, CAP, che formano l' angolo solido A.

486. *La somma degli angoli piani* BAC, CAP, PAB, *che formano un' angolo solido* A (Fig. 312.), *sarà sempre minore di quattro retti.*

Termino l'angolo solido A con una base BPC, la quale co' piani dei tre angoli BAC, CAP, PAB formi tre altri angoli solidi B, C, P. Ora, nell'angolo solido B, i due angoli piani PBA, ABC son maggiori del terzo PBC (*N.*485.); similmente, nell' angolo solido C i due angoli piani BCA, ACP son maggiori del terzo BCP, e nell'angolo solido P, i due angoli piani CPA, APB son maggiori del terzo CPB: ma nel triangolo BPC, i tre angoli PBC, BCP, CPB sono uguali a due retti; dunque li 6

PBA,

PBA, ABC, BCA, ACP, CPA, APB son maggiori di due retti: ora, tutti gli angoli dei tre triangoli BAC, CAP, PAB sono uguali a *6* retti, perocchè in ogni triangolo i tre angoli sono uguali a due retti; da *6* retti sottraendo dunque il valore degli angoli sopra le basi de' tre triangoli, che vale più di due retti, li tre angoli, i quali formano l'angolo solido A, saran minori di quattro retti; e lo stesso agevolmente si proverebbe, se l'angolo solido A fosse formato da un numero maggiore d'angoli piani.

Della Misura de' Solidi, e de' lor rapporti.

487. *Cubo* dicesi un solido contenuto da sei facce, di cui tutt' i lati sono fra loro uguali, e gli angoli son retti (*Fig.* 313.); la faccia ABCD, sopra cui si concepisce che sia appoggiato il solido, appellasi *Base inferiore*, o semplicemente *Base*; l'opposta FGHE alla Base s'appella *Base superiore*; e l'altre quattro diconsi *ascendenti*, poichè sono fra la base inferiore e la superiore; egli è manifesto, che l'altezza di questo solido non differisce dall' uno de' lati GB delle facce ascendenti, perocchè tutte le facce son perpendicolari l'une all'altre.

488. Il *Parallelepipedo* è un solido ABCDEFGH (*Fig.* 314.) contenuto da sei parallelogrammi, di cui gli opposti sono uguali: Dicesi *Parallelepido rettangolo*, quando tutti gli angoli de' parallelogrammi son retti; ed *inclinato*, quando gli angoli non sono retti.

489. Il Prisma APCDEFGHIKLNM (*Fig.*315.) è un solido contenuto da due basi uguali e parallele ABCDEF, HILNMG, e da tanti parallelogrammi, quanti sono i lati d'ogni base. Egli è *retto*, quando i parallelogrammi ascendenti son perpendicolari alle basi, ed *inclinato*, quando essi sono inclinati fra le basi. Inoltre, se'l Prisma ha per base un triangolo, dicesi *prisma triangolare*: se ha per base un pentagono, dicesi *prisma pentagonale*; e così di seguito.

490. Il *Cilindro* è un solido contenuto da due basi uguali e parallele, che son due circoli AB, CD (*Fig.* 316.), e da una superficie curva, che regna fra i due circoli.

Essendo'l circolo un poligono d'infiniti lati, puossi concepire il cilindro come un prisma, la cui base sia composta d'infinite rette, o d'infiniti lati.

491. La *Piramide* è un solido contenuto da una base ABCD (*Fig.*317.), e da tanti triangoli ascendenti AEB, BEC, CED, DEA, quanti sono i lati della base. Questi triangoli han tutt' i

loro

loro vertici in un medesimo punto E, e la linea EO tirata dal vertice al centro O della base dicesi *Asse*: ora quest'asse non differisce dall'altezza, quando egli è perpendicolare alla base, ma quando vi è inclinato, inclinata è pure la piramide, e l'altezza dee prendersi dalla perpendicolare tirata dal vertice E sopra la base.

492. Il *Cono* è una piramide ABE (*Fig.* 318.), la cui base AB è un circolo. Dicesi *retto*, se 'l suo asse EO cade perpendicolarmente sopra la base, e inclinato se cade obbliquamente.

493. La *Sfera* è un solido ABCD (*Fig.* 319.) perfettamente rottondo, nel cui mezzo evvi un punto O equidistante da tutt'i punti della superficie. Se si concepisce, ch'un semicircolo ACB si ravvolga intorno al suo diametro immobile BA, colla sua rivoluzione egli descriverà una Sfera. Qualunque retta BA, che passi pel centro O, e che dall'una e dall'altra parte termini alla superficie, si dice *Asse*, o *Diametro della Sfera*; e qualunque linea OB tirata dal centro alla superficie chiamasi *Raggio*.

494. PROPOSIZIONE CVII. *Se un parallelepipedo, un prisma, od un cilindro retti, od inclinati sono segati da un piano parallelo alla base, sarà detto piano simile ed uguale alla base.*

Sia il parallelepido ABCDEFGH (*Fig.* 314.) segato dal piano MNOP parallelo alla sua base ABCD; essendo 'l parallelogrammo BCHG tagliato dai due piani MNOP, ABCD fra lor paralleli, anche le sezioni NO, BC fatte sopra detto parallelogrammo son parallele (*N.* 482.), ed in conseguenza uguali, per essere fra le parallele BG, CH. Nello stesso modo si proverà, che i tre lati del piano MNOP sono uguali e paralleli ciascuno a ciascuno agli altri tre della base ABCD: ora, gli angoli del piano MNOP son parimente uguali a quei della base, per essere i loro lati paralleli a quei della base; dunque i due piani MNOP, ABCD sono simili, ed uguali. Lo stesso egualmente si dimostrerà d'un cubo; imperocchè egli altro non è ch'un parallelepipedo rettangolo, di cui uguali sono i lati della base, e l'altezza.

495. PROPOSIZIONE CVIII. *Qualsivoglia cubo, parallelepipedo prisma e cilindro retti, od inclinati sono uguali alla sua base moltiplicata per l'altezza, cioè per la perpendicolare tirata fra le due basi.*

Sia il parallelepipedo AB (*Fig.* 320.); se si concepisce, ch'ei sia segato da infiniti piani paralleli alla base e infinitamente prossimi, la somma di detti piani sarà uguale al parallelepipedo. Ora, tutti questi piani son' uguali alla base (*N.* 494.); altro non è

dunque la lor somma che la base presa tante volte, quanti sono i piani, cioè la base moltiplicata per la grandezza, che denota la moltitudine de' piani. Ma l'altezza AC del parallelepipedo viene segata da' piani in tante parti infinitamente picciole ed uguali, e ogn' una di queste è l' altezza infinitamente picciola di ciascun piano, poichè l'altezze si misurano colle perpendicolari; onde l' altezza AC dinota la moltitudine de' piani, che compongono il parallelepipedo; e per conseguenza questo solido equivale al prodotto della base per la sua altezza.

Così ancora si proverà, che 'l parallelepipedo inclinato **AB** (*Fig.321.*) equivale al prodotto della sua base per la sua altezza **CE**; poichè sebbene il limite inclinato AC sia segato dai piani in tante parti uguali, quanti sono i piani, che compongono 'l solido, tuttavolta, siccome questa linea non è perpendicolare fra i piani, ognuna delle sue parti è maggiore dell'altezza infinitamente picciola di ciascuno de' piani, là dove ogni particella della perpendicolare CE è precisamente uguale all' altezza infinitamente picciola di ciascun piano; dal che ne segue, che la perpendicolare è quella, ch' esprimer ne dee la moltitudine, e che perciò il parallelepido equivale alla sua base moltiplicata per la sua altezza.

496. COROLLARIO I°. *Tutt' i parallelepipedi, prismi e cilindri, che hanno la medesima base ed altezza, ovvero le basi e l' altezze uguali, sono uguali.*

Ciò è per se evidente, poich' essi sono i prodotti delle lor basi per la loro altezza.

497. COROLLARIO II. *I parallelepipedi, i prismi e cilindri, che hanno le basi uguali e l' altezze disuguali, sono fra lor come l' altezze; quei, che hanno le basi disuguali e l' altezze uguali, sono fra loro come le lor basi; e quei, che hanno le basi reciproche all' altezze, sono uguali.*

Sieno i due parallelepipedi **AF**, **MR** (*Fig.* 322.): se supponiamo, che le due basi sieno uguali, le chiamo ambedue **X**; così 'l primo è **X × HA**, e 'l secondo **X × MT**: ora, essendo l' altezze **HA**, **MT** moltiplicate per una medesima grandezza **X**, i prodotti **X × HA**, **X × MT** sono fra loro come **HA**, **MT**; dunque i parallelepipedi sono fra lor come l' altezze **HA**, **MT**.

Così pure si dimostrerà, che se le basi son disuguali e l' altezze uguali, i parallelepipedi sono fra loro come le basi.

In fine, se le basi son reciproche all' altezze, cioè se **ABCD**. **MNOP** : : **MT**. **AH**, facendo il prodotto degli estremi e de' medj

medj s'avrà ABCD × AH = MNOP × MT, cioè i due parallelepipedi uguali.

498. COROLLARIO III. *I parallelepipedi, i prismi e cilindri sono fra loro in ragion composta della ragione delle loro altezze, e di quella delle lor basi.*

Sieno i due parallelepipedi AF, MR (*Fig.* 322.); la ragione delle loro altezze è AH, MT; quella delle lor basi è ABCD, MNOP, e la composta delle due si è AH × ABCD, MT × MNOP: Ora i due termini di questa ragione sono li due parallelepipedi; perciò detti due solidi sono in ragion composta, ec.

499. PROPOSIZIONE CIX. *Se una piramide* ABCDE, *la cui altezza è* EQ (Fig.323.), *viene segata da un piano* MNOP *parallelo alla base* ABCD: *dico* 1°. *egli sarà simile alla base.* 2°. *Che sarà alla base, come il quadrato della sua altezza* SE *al quadro dell' altezza* QE *della base, prendendo per altezze le distanze de' piani al vertice* E *della piramide.*

Essendo la faccia AEB segata dai due piani MNOP, ABCD paralleli tra loro, le sezioni MN, AB sono fra se parallele. Per la stessa ragione, gli altri tre lati del piano MNOP son paralleli ai tre lati della base: Ora, nella faccia AEB abbiamo MN. AB : : ME. AE, a cagione delle parallele MN, AB; e perciò nella faccia ADE abbiamo MP. AD : : ME. AE. Dunque MN. AB : : MP. AD; il che fa vedere, essere i lati MN, MD del piano MNOP proporzionali a'lati AB, AD della base. E così troveremo ancora, che gli altri due lati PO, ON del piano MNOP son similmente proporzionali a' lati DC, CB della base. Ma gli angoli del piano MNOP equivagliono ciascuno a ciascuno agli angoli della base, per essere i lati paralleli; onde il piano MNOP è simile alla base. Il che dovea 1°. dimostrarsi.

Simili essendo i piani MNOP, ABCD, sono fra loro come i quadri de' lor lati omologhi MN, AB: ma noi abbiamo NN. AB : : ME. AE; i due piani son dunque fra loro come i quadrati di ME, AE. Dal punto Q, ove la perpendicolare sega la base, tiro la retta AQ, il che mi dà il triangolo AQE, in cui le due sezioni MS, AQ, formate dai due piani MNOP, ABCD fra loro paralleli, son parallele. Così noi abbiamo SE. QE : : ME. AE; e per conseguenza i due piani MNOP, ABCD, essendo fra loro come i quadri di ME, AE, sono parimente come i quadrati di SE, QE. Il che dovea 2°. dimostrarsi.

Lo stesso si proverà d'una piramide inclinata ABCE (*Fig.*324.); poi-

poichè, prolungando il piano MNOP e la base fino al concorso della perpendicolare EQ tirata dal vertice sopra la base, e tirando nella base la retta AQ, che darà 'l triangolo AQE, le sezioni MS, AQ, fatte sul triangolo dai piani paralleli MNOP, ABCD prolungati, saran parallele: così avremo ES. EQ : : EM. EA : : MN. AB; e li piani PMNO, ABCD essendo fra loro, perchè son simili, come i quadri de'loro lati omologhi MN, AB, saranno in conseguenza come i quadri delle loro altezze ES, EQ.

500. PROPOSIZIONE CX. *Le piramidi, che hanno le basi e l' altezze uguali, son' uguali fra loro.*

Sieno le due piramidi ABCDE, HZVQ (*Fig.* 325.), in cui suppongo, che la base quadra della prima sia uguale alla base triangolare della seconda, e che l' altezza OE sia uguale all'altezza QX. Sego l'una e l'altra co' piani MNLP, RYT paralleli alla base, e posti in eguali distanze dai vertici E, Q; ciò che mi dà ES = QF: ora, nella prima piramide, MNLP. ABCD :: $\overline{SE}^2$. $\overline{OE}^2$ (*N.* 499.), e nella seconda, RYT. HZV :: $\overline{QF}^2$. $\overline{QX}^2$; dunque, per essere $\overline{QF}^2 = \overline{ES}^2$, e $\overline{QX}^2 = \overline{OE}^2$, ho MNLP. ABCD :: RYT. HZV: ma ABCD = HZV; onde MNLP = RYT.

Ora se si concepisce, ch' amendue le piramidi sieno segate da infiniti piani paralleli alla base, nell'una non vi sarà maggior numero de' piani che nell'altra, per essere l'altezze uguali; e ciascun piano dell' una sarà uguale a ciascun piano dell' altra posto in egual distanza dal vertice, come abbiam veduto; dunque la somma de' piani dell' una equivarrà alla somma de' piani dell' altra, e conseguentemente le due piramidi saranno uguali.

501. COROLLARIO. Quanto nelle due precedenti proposizioni s' è detto circa le piramidi dee ancora intendersi de' coni retti, od inclinati; perocchè i coni sono piramidi, le cui basi hanno infiniti lati.

502. PROPOSIZIONE CXI. *Qualunque prisma triangolare* ABCDEF (Fig. 326.) *può dividersi in tre piramidi uguali.*

Sego i tre parallelogrammi ascendenti colle diagonali AF, FC, EC, e faccio passare un piano per le due AF, FC, ed un' altro per le due FC, EC; il che mi dà tre piramidi ABCF, EFDC, ECAF: ora, le due prime han le basi ABC, DEF non meno che le loro altezze BF, DC uguali; e se si concepisce, che la seconda EFDC abbia per base il triangolo ECD, e che la base della terza EACF sia 'l triangolo ECA, si troverà, che dette due pi-

ramidi son parimente uguali, poichè uguali sono le lor basi EAC, ECD, ed hanno i loro vertici nello stesso punto F, il che dà loro una medesima altezza. Onde le tre piramidi sono uguali.

503. COROLLARIO. *Qualunque prisma triangolare* ABCDEF *è dunque il triplo d'una piramide* ABCF *d'ugual base, ed altezza.*

504. PROPOSIZIONE CXII. *Ogni piramide, di qualunque numero di lati sia la sua base, è 'l terzo d'un prisma d' ugual base, ed altezza.*

Sia la piramide pentagonale ABCDEF (*Fig.* 327.); dal punto O, in cui 'l suo asse sega la base, tiro delle rette OA, OB, OC, ec. a tutti gli angoli, il che divide la base in tanti triangoli, quanti sono i suoi lati. Sego la piramide con dei piani, che passino pel vertice F e per le rette OA, OB, OC, ec. ed essa si troverà divisa da cinque piramidi triangolari, ognuna delle quali avrà per base l'uno de' triangoli della base. Sopra detti triangoli costruisco de' prismi triangolari d'uguale altezza, e questi cinque prismi pres' insieme formano un prisma totale, di cui la base è simile a quella della piramide, e l'altezza è uguale: ora, qualunque prisma triangolare è 'l triplo della piramide triangolare corrispondente; dunque il prisma totale è 'l triplo della piramide totale, e per conseguenza la piramide n'è il terzo.

E lo stesso si dimostrerà delle piramidi inclinate, e de' coni retti, od inclinati.

505. COROLLARIO. *Le piramidi, che han le basi uguali e l'altezze disuguali, sono fra esse come le loro altezze: quelle, che hanno l'altezze uguali e le basi disuguali, sono fra loro come le lor basi; e quelle, che han l'altezze reciproche alle basi, sono uguali.*

Le piramidi sono il terzo de' prismi d' ugual base, ed altezza: ma ciò che conviene agl' interi, conviene a' loro terzi; dunque quello, che s'è detto de' prismi (*N.* 497.), dicasi ancora delle piramidi.

506. PROPOSIZIONE CXII. *Se data una piramide* ABCF (Fig. 328.) *vien' ella segata da un piano* OED *parallelo alla base; dico, che per avere il valor della parte troncata* ABCDEO, *conviene prima cercare un piano medio proporzionale Geometrico fra la base inferiore e la superior* DEO, *poi sommar detto piano alle due basi, e moltiplicare il tutto pel terzo dell' altezza* XZ *della parte troncata* ABCDEO.

Supponiamo, che la piramide sia triangolare: sego due delle facce ascendenti ABEO, BCDE con delle diagonali AE, CE, e fa-

facendo per dette due diagonali passare un piano, dalla piramide troncata levo la piramide ABCE, e me ne resta un'altra AODCE; colla diagonale OC sego la faccia AODC, e con un piano, che passi per lo vertice E e la diagonale OC, sego AODCE; il che mi dà due altre piramidi AOCE, ODCE.

Ora, cerco 'l rapporto della prima di queste tre piramidi ABCE alla seconda AOCE; e siccome esse hanno due facce ABE, OEA, le quali sono sopra un medesimo piano, s' io le piglio per loro basi, avranno amendue il vertice in C, e per conseguente la loro altezza sarà uguale; quindi dette due piramidi saran fra loro come le basi ABE, OEA: ma essendo queste due basi, o questi due triangoli fra le due parallele AB, OE, sono tra loro come le basi AB, OE; onde le due piramidi saranno fra esse come AB, OE: così, chiamando P la prima ABCE, ed S la seconda AOCE, avremo P . S : : AB . OE.

Cerco parimente il rapporto della seconda AOCE alla terza ODCE; e prendendo per loro basi le facce AOC, ODC, le quali sono sopra un medesimo piano, trovo che hanno il comun vertice in E, e per conseguenza essere d'ugual' altezza; quindi dette due piramidi sono fra loro come le lor basi, o come i lor triangoli AOC, ODC: ma essendo questi triangoli fra le parallele AC, OD, sono fra loro come le lor basi AC, OD, e a cagione de' triangoli simili ABC, OED abbiamo AC . OD : : AB . OE; le due piramidi AOCE, ODCE son dunque fra loro come AB. OE: così, chiamando T la terza ODCE, abbiamo S . T : : AB . OE: ma prima si è trovato P . S : : AB. OE; perciò abbiamo ancora P . S : : S . T; cioè le tre piramidi, che compongono la piramide troncata ABCDEO, sono in proporzione continua.

Cerco un piano medio proporzionale, ch'io chiamo V, tra la base inferiore ABG e la superiore OED, il che mi dà ABC. V : : V. OED; e moltiplicando tutto per la medesima grandezza $\frac{1}{3}$XZ, cioè pel terzo dell'altezza XZ del segmento, le tre quantità ABC × $\frac{1}{3}$XZ, V × $\frac{1}{3}$XZ e OED × $\frac{1}{3}$XZ sono parimente in proporzione continua: ora, la prima ABC × $\frac{1}{3}$XZ è uguale alla prima piramide ABCE, e la terza OED × $\frac{1}{3}$XZ è uguale alla terza ODCE; dunque la seconda V × $\frac{1}{3}$XZ equivaler dee alla seconda AOCE; ed in conseguenza il segmento ABCDEO equivale ai tre piani ABC, V, OED moltiplicati pel terzo dell' altezza XZ del segmento.

Se la piramide non è triangolare (*Fig.* 329.), da' centri X, Z delle due basi tiro delle rette ai loro angoli, e facendo passare

K 2 de'

de' piani per le linee di divisione dell'una e dell'altra base, il segmento trovasi diviso in tanti segmenti di piramidi triangolari, quanti sono i lati della base; e ciascuno di detti segmenti sarà uguale alle sue due basi triangolari sommate al piano medio proporzionale, il tutto moltiplicato per $\frac{1}{3}$ZX. Ora, s' io prendo un piano medio proporzionale MNPQ fra le basi totali ABCD ed HEFG, ei si troverà diviso in un numero di triangoli uguale a quello di queste basi, e ognuno di detti triangoli sarà medio proporzionale fra le due basi della piramide triangolare, che da esso verrà segata; onde sommando insieme li piani ABCD, MNPQ, HEFG, e moltiplicando la somma per $\frac{1}{3}$XZ, avrem tosto la somma de' segmenti triangolari componenti 'l segmento AF.

Egli è agevol cosa applicare quanto abbiamo fin quì detto ai segmenti delle piramidi inclinate.

507. PROPOSIZIONE CXIII. *Qualunque prisma triangolare troncato* (Fig. 330. 331. 332. 333.) *equivale al triangolo* ABC, *che li serve di base, moltiplicato pel terzo dei tre limiti, che formano i piani ascendenti, cioè pel terzo delle sue tre lunghezze*.

O'l prisma triangolare è troncato sol da una delle sue estremità (*Fig.* 332. 333. 334.), o da amendue (*Fig.* 335.). S' egli non è troncato che da una, può accadere, 1°. Che due delle sue lunghezze BE, CD (*Fig.* 330.) sieno uguali, e che la terza AH sia maggior di ciascuna dell' altre due. 2°. Ch' uguali essendo due delle sue lunghezze AH, CG (*Fig.* 331.), la terza BE sia minore di ciascuna d' esse. 3°. Finalmente, che le tre lunghezze AH, BE, CG sieno fra lor disuguali (*Fig.* 332.). Esaminiamo tutti questi casi in particolare.

Se la lunghezza AH è maggiore delle due uguali BE, CD (*Fig.* 330.), sego 'l prisma con un piano EFD parallelo alla base ADC, e che passi per l' estremità E, D delle lunghezze uguali BE, CD; ciò che sega 'l prisma troncato in due solidi, di cui l' uno si è 'l prisma ABCDE, e l'altro la piramide DEFH: ora, il prisma ABCDE equivale alla sua base ABC moltiplicata per la lunghezza BE, o pel terzo delle sue tre lunghezze uguali AF, BE, CD; e la piramide alla sua base DEF, o alla sua uguale ABC moltiplicata pel terzo della sua altezza FH: così 'l prisma troncato ABCDEH equivale alla sua base ABC moltiplicata per lo terzo delle tre lunghezze DC, BE, AF, più 'l terzo della lunghezza FH: ma il terzo di AF, più quello di FH è uguale al terzo di AH; il prisma troncato è dunque uguale alla sua base

mol-

moltiplicata pel terzo delle sue tre lunghezze CD, BE, AH.

Se le due lunghezze uguali AH, CG (*Fig.* 331.) sono maggiori della terza BE, sego 'l prisma con un piano DEF parallelo alla sua base ABC, e che passi per l' estremità E della terza lunghezza BE; ciò che sega il prisma troncato in due solidi, di cui l' uno si è 'l prisma triangolare ABCDEF, e l' altro la piramide DGHFE.

Colla diagonale HD sego la faccia DGHF di detta piramide, e facendo per detta diagonale e pel vertice E passare un piano, la piramide DGHF è segata in altre due HDFE, DGHE fra loro eguali, per essere il vertice E comune, e le basi HGD, HDF visibilmente uguali, poichè DGHF è un parallelogrammo, di cui HD è la diagonale. Ma pigliando per base della piramide FEDH il piano FED $=$ ADC, l' altezza di detta piramide si è la retta FH; onde questa piramide è uguale al piano ADC moltiplicato per $\frac{1}{3}$FH, e conseguentemente l' altra DGHE equivale allo stesso piano ADC moltiplicato per $\frac{1}{3}$FH, o per $\frac{1}{3}$GD, a cagione di GD $=$ FH; e siccome 'l prisma ABCDEF è uguale al medesimo piano moltiplicato pel terzo delle rette CD, BE, AF, così ne segue, ch' il prisma troncato, composto di detti tre solidi, equivale al prodotto della base ABC moltiplicata pel terzo delle rette CD, BE, AF, più 'l terzo di FH, più quello di DG: ma $\frac{1}{3}AF + \frac{1}{3}FH = \frac{1}{3}AH$, e $\frac{1}{3}CD + \frac{1}{3}DG = \frac{1}{3}CG$; onde 'l prisma troncato equivale alla sua base ABC moltiplicata per $\frac{1}{3}BE + \frac{1}{3}AH + \frac{1}{3}CG$.

Se le tre lunghezze AH, BE, CG son disuguali (*Fig.* 332.), opero come nel caso precedente, e 'l prisma troncato trovasi diviso in un prisma triangolare ABCDEF e in due piramidi DGHE, DHFE, che hanno il vertice E comune, e che sono per conseguenza come le lor basi disuguali DGH, DHF: ma essendo queste basi, o questi triangoli fra le parallele DG, FH, sono fra loro come le lor basi GD, FH; onde le due piramidi sono fra loro come le rette GD, FH. Ora, prendendo per base della piramide DHFE il piano FED, l' altezza n' è FH; dunque la piramide DGHE equivaler dee ad un' altra piramide, ch' abbia per base lo stesso piano FED, e per altezza la linea GD; poichè, essendo le basi uguali, questa nuova piramide sarebbe alla piramide DGHE, come GD, FH. Così la piramide DEFH $=$ FED $\times \frac{1}{3}$FH $=$ ABC $\times \frac{1}{3}$FH; la piramide DGHE $=$ ABC $\times \frac{1}{3}$DG,

e 'l

e'l prisma ABCDEF $= ABC \times \overline{\tfrac{1}{3}AF + \tfrac{1}{3}BE + \tfrac{1}{3}CD}$. Dunque il prisma troncato ABCGHE $= ABC \times \overline{\tfrac{1}{3}AF + \tfrac{1}{3}BE + \tfrac{1}{3}CD + \tfrac{1}{3}FH + \tfrac{1}{3}DG}$: ma $\tfrac{1}{3}AF + \tfrac{1}{3}FH = \tfrac{1}{3}AH$, e $\tfrac{1}{3}CD + \tfrac{1}{3}DG = \tfrac{1}{3}CG$; onde ABCGHE $= ABC \times \overline{\tfrac{1}{3}AH + \tfrac{1}{3}BE + \tfrac{1}{3}CG}$.

Alla fine, se'l prisma triangolare è troncato dalle sue due estremità (*Fig.* 333.), taglio i suoi tre limiti con un piano ABC, che lor sia perpendicolare, il che sega detto prisma in due altri ABCDHE, ABCMON, ognuno de' quali è troncato da una sola delle sue estremità. Così 'l primo ABCDHE equivale al piano ABC moltiplicato pel terzo delle sue tre lunghezze AH, EB, CD, e'l secondo ABCMON al piano ABC moltiplicato pel terzo delle sue tre lunghezze AO, BN, CM; dunque li due insieme, cioè il prisma totale è uguale al piano ABC moltiplicato pel terzo delle tre lunghezze OH, NE, MD.

508. AVVERTIMENTO. Quantunque le cose predette risguardino'l solo prisma triangolare troncato, possono nondimeno servirci anche per misurare qualunque prisma troncato. Sia, per esempio, il prisma pentagonale troncato ABCDEFGHIL (*Fig.* 334.). Dall' uno degli angoli E della base tiro agli altri delle rette EB, EC, il che divide la medesima base in tre triangoli; e concepisco, che sieno sopra queste rette EB, EC alzati de' piani perpendicolari alla base, i quali divideranno'l prisma troncato in tre prismi triangolari troncati. Così, misurando ciascuno di questi prismi in particolare, la lor somma darammi'l prisma totale. Nel resto, con assai maggior facilità trovasi'l valore de'prismi troncati mediante'l centro di gravità della base, come vedremo nel terzo Libro; ed io non ho quì parlato del prisma triangolare troncato ch' a solo fine di facilitare il seguente Problema, il quale concerne la misura de' Rivestimenti, o delle Mura delle Piazze da Guerra.

509. PROBLEMA. *Misurare il Rivestimento d' una Piazza da Guerra.*

Ognun sà, che le Mura delle Piazze da guerra hanno una scarpa di muro, cioè che han più grossezza nel basso che nell' alto; e in ciò appunto consiste la difficoltà di misurarle. Or' ecco quello, che fra tutt'i metodi mi pare'l più semplice e facile, quantunque il meno usitato, forse perchè men noto degli altri, o perchè difficilmente si lascian le strade ordinarie. Ciò si giudicherà esser vero, se vorremo paragonarlo alla pratica comunemente seguita.

Sia

Sia dunque il Solido della Figura 335, che rappresenta un semi Bastione, ed una parte della Cortina.

Misuro prima la lunghezza e la larghezza della muraglia al vertice, e siccome queste due dimensioni formano i trapezoidi ABCD, DCEF, FEHI, ognun de' quali ha l'altezza comune RT, sommo insieme le loro lunghezze medie SV, VX, XZ, e moltiplicando la somma per l'altezza RT, il prodotto si è'l valore dei tre trapezoidi; moltiplico questo prodotto per l'altezza A*a* della muraglia, ed ho il valore d'una muraglia senza scarpa, la cui base è composta di tre trapezoidi *a*MN*b*, *b*N*oc*, O*cd*L uguali ciascuno a ciascuno ai tre superiori.

Ora per misurare la scarpa di muro, considero, esser' ella composta di tre prismi triangolari troncati M*e*BDNF, DN*fg*OF, gOFI*b*L, e perciò io sego l'uno d'essi con un piano *rsi* perpendicolare alle sue tre lunghezze; e siccome questa sezione è la stessa nei tre prismi, unisco le loro tre lunghezze BDF*i*, MNOL, *efgb*, e prendendo'l terzo di detta somma, il moltiplico per lo piano *rsi*; ciò che mi dà ad un tratto la scarpa di muro, che sommata alla muraglia senza scarpa mi dà l'intero rivestimento.

Quindi manifesto apparisce, che le stesse operazioni far si potrebbero, quando anche il fianco fosse rottondo, e coperto d'un' orecchione.

510. PROPOSIZIONE CXVI. *La sfera equivale a due terzi d'un cilindro d'ugual' altezza, che abbia per base'l circolo del diametro della sfera, cioè il massimo circolo d'essa.*

Sia'l quarto di circolo ABC (*Fig.* 337.), che ravvolgendosi intorno'l suo raggio fisso BC descrive una semisfera ABL. Descrivo il quadro ACBM del raggio BM, e'l sego colla diagonale MC, la quale forma il triangolo rettangolo isoscele MBC; concepisco, ch'il raggio BC sia diviso in un' infinità di particelle fra loro uguali, e che da' punti di divisione O, T, ec. sieno tirate delle perpendicolari OQ, TX a detto raggio, che terminino sopra AM: esse saranno elementi del quadrato AMBC; le loro parti OR, TZ, ec. che vanno a terminare sulla circonferenza del quarto di circolo, saranno gli elementi di questo quarto di circolo, e le parti OS, TV, ec. che vanno a terminare sopra la diagonale MC, saranno gli elementi del triangolo rettangolo isoscele MBC; tal che qualsivoglia Elemento OS ec. di detto triangolo equivarrà alla sua distanza OC, ec. del centro C, poichè i triangoli simili MBC, SOC ci danno MB. BC : : SO. OC: ma MB = BC; dun-

dunque SO = OC; ed egli è facile comprendere, che qualunque elemento OQ, TX, ec. del quadro ACBM sarà uguale al raggio BC: ciò posto.

Se si concepisce, che 'l quadro ACBM, il quarto di circolo ABC e 'l triangolo MBC si ravvolgano intorno 'l raggio fisso BC; gli elementi del quadro ACBM descriveran de' circoli tutti uguali, che formeranno un cilindro AMHL; quei del quarto di circolo descriveran de' circoli, che formeranno una semisfera ABL, e 'l cui massimo sarà quello descritto dal raggio AC, che perciò dicesi 'l circolo massimo della sfera; e gli elementi del triangolo MBC descriveran de' circoli, che formeranno un cono MCH. Ora, essendo questi circoli fra loro come i quadri de' lor raggi, in vece de' circoli si pongano per un momento i quadrati; e per la proprietà del circolo avremo $\overline{OR}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{OC}^2$ (*N.* 284.): ma BC = OQ, ed OC = OS; dunque $\overline{OR}^2 = \overline{OQ}^2 - \overline{OS}^2$; per la stessa ragione noi avremo $\overline{TZ}^2 = \overline{TX}^2 - \overline{TV}^2$, e così degli altri; cioè i quadrati degli elementi del quarto di circolo son' uguali ai quadri degli elementi del quadrato ACBM, meno i quadri degli elementi del triangolo MBC; onde, rimettendo i circoli in vece de' quadri, avremo i circoli descritti dagli elementi del quarto del circolo, in cui la semisfera ABL equivale a' circoli descritti dagli elementi del quadro ACBM, od al cilindro AMHL, meno i circoli descritti dagli elementi del triangolo MBC, o meno il cono MBC: ma poichè il cono MBC è una piramide d' infiniti lati, egli è 'l terzo del cilindro AMHL, ch' è un prisma d' infiniti lati della stessa base ed altezza del cono; la semisfera ABC è dunque uguale ai due terzi del cilindro AMHL.

Nel modo stesso si proverà, che la semisfera AKL equivale ai due terzi del cilindro APEL, e ch' in conseguenza l' intera sfera è uguale ai due terzi del cilindro MPEH.

511. COROLLARIO I°. *Tutt' i circoli elementari componenti una sfera* ABCD (Fig. 336.) *sono al massimo circolo* AC *moltiplicato pel numero, ch' esprime la loro moltitudine, cioè pel diametro* BD, *come* 2 *a* 3.

Il massimo circolo AC moltiplicato per BD forma 'l cilindro MNOP: ma, la sfera, o la somma di questi circoli elementari è i due terzi del cilindro; onde la somma de' circoli elementari è al massimo AC moltiplicato per BD, come 2 a 3.

512. COROLLARIO II. *Un segmento di sfera* ABC (Fig.338.) *equivale alla porzione* MPSR *del cilindro circonscritto, che ha la medesima altezza del segmento, meno'l cono troncato* MHLP *d'uguale altezza; la zona* QEFY, *che ha per base il massimo circolo, equivale alla porzione cilindrica* QTVY *d' uguale altezza, meno'l cono* XOZ *dell' istessa altezza; la zona* EACF *equivale alla porzione cilindrica* TRSV *della medesima altezza, meno 'l cono troncato* HXZL *dell'istessa altezza; la zona* aEFb *equivale alla porzione cilindrica* mTVn *dell' istessa altezza, meno i coni* XZO, cOd; *e'l settore* ABCO *al segmento* ABC *più'l cono* AOC.

Ciò manifesto si scorge per la precedente proposizione: ma vedremo in progresso, che molto più agevolmente misurar si possono tutte queste porzioni di sfera col mezzo delle loro superficie.

513. DIFFINIZIONE. Se un cilindro ABCD (*Fig. 339.*) è tagliato da un piano inclinato MXN, che seghi la sua base di dentro, la porzione cilindrica MXNA tagliata da detto piano dicesi *Ungula cilindrica:* se'l piano segante MXN passa pel centro O della base, l'ungula MXNA appellerassi *Ungula cilindrica della prima spezie*. E se'l piano segante PZQ, od RTS non passa pel centro O della base, l'ungula PZQA, od RTSA chiamerassi *ungula cilindrica della seconda spezie.*

PROPOSIZIONE CXVII. *Qualsivoglia ungula cilindrica della prima spezie è composta d' infiniti triangoli rettangoli, che sono fra loro come i circoli elementari d' una sfera.*

514. Sia l'ungula della prima spezie ABCD (*Fig.*340.); la sua base è dunque un semicircolo, poichè 'l piano inclinato ABC passa pel centro O della base del cilindro, in cui viene segata quest'ungula; e per conseguenza la comun sezione AC del piano inclinato e della base è un diametro: ora, ciò posto.

Supponiamo, che nella base, o semicircolo ADC sieno tirate delle rette LP, RS, OD, ec. infinitamente prossime, e perpendicolari al diametro AC, e che sieno sopra ognuna d' esse alzati de' piani LQP, RTS, ec. perpendicolari alla base ADC dell' ungula, e seganti l'ungula stessa. 1°. Tutti questi piani seganti saranno de' triangoli rettangoli LPQ, RST, ec. la comun sezione di ciascheduno d'essi e della base ADC sarà una retta linea (*N.* 477.), non meno che la comun sezione d' ognun di loro, e del piano ABC; e siccome la superficie d'un'ungula ABCD, o del cilindro, in cui egli è segato, altro non è ch'una serie di rette linee alzate perpendicolarmente sopra tutt' i punti della circonferenza ADC della base; egli è per se evidente, che qualunque piano segante, co-

me LPQ, perpendicolare alla base ADC non può segar la superficie dell' ungula che coll'una delle sue perpendicolari PQ, e ch'in conseguenza detto piano LPQ esser dee un triangolo rettangolo; poichè essendo QP perpendicolare alla base ADC, egli esser dee altresì perpendicolare ad LP, che trovasi in detta base, e che passa pel punto P (*N.* 463.). 2°. Simili saranno i piani seganti, o triangoli rettangoli LPQ, RST, ec. che taglieran l' ungula; poichè, essendo fra loro paralleli, le rette QL, TR, ec. in cui essi segheranno 'l piano inclinato ABC, saran parallele (*N.* 482.), non meno che le rette LP, RS, in cui questi stessi triangoli segano la base ADC dell' ungula: così, paralleli essendo ciascuno a ciascuno i lati degli angoli acuti QLP, TRS, ec. di detti triangoli (*N.*479.), saranno uguali, ed in conseguenza simili saran fra loro tutt' i triangoli rettangoli QLP, TRS, ec. Ora, i triangoli simili sono fra lor come i quadri de' loro lati omologhi; onde tutt' i triangoli rettangoli QLP, TRP, ec. che segheranno l' ungula, sono fra loro come i quadrati delle lor basi LP, RS, ec. o come i circoli, che sarebbon descritti da queste basi girando intorno 'l diametro AC: ma tutti questi circoli comporrebbero una sfera; dunque, ec.

514. COROLLARIO I°. *Il massimo di tutt' i triangoli rettangoli componenti un' ungula si è 'l triangolo* ODB, *che passa pel centro* O *della base del cilindro; e gli altri sono uguali due a due.*

I triangoli componenti l' ungula sono fra essi come i quadri delle lor basi LP, RS, ec. ora, poichè queste basi sono gli elementi del semicircolo ADC, la maggiore si è'l raggio OD; dunque ODB è 'l triangolo maggiore: così pure, le basi RS, MN equidistanti dalla base OD son' uguali, perchè sono le metà delle corde SV, NE ugualmente lontane dal centro O; onde i triangoli RST, MNZ son' uguali; e così degli altri.

515. COROLLARIO II. *Qualsivoglia ungula della prima spezie equivale al prodotto del suo triangolo maggiore* OBD *moltiplicato per i due terzi del diametro* AC *della sua base.*

Tutt' i triangoli, che compongono un' ungula della prima spezie, sono fra loro come i circoli, che descritti sarebbero dalle lor basi girando intorno 'l diametro AC della base: ora, questi circoli comporrebbero una sfera, e sarebbon per conseguenza uguali al maggiore moltiplicato per i due terzi del diametro AC; onde tutt' i triangoli, che compongono un' ungula, equivagliono al triangolo maggiore ABD moltiplicato per i due terzi del diametro AC.

516. COROLLARIO III. *L' altezza d' un' ungula della prima spezie equivale all' altezza del triangolo maggiore.*

Si-

Simili essendo tutt'i triangoli LPQ, RST, ODB, ec. componenti l'ungula, le lor basi LP, RS, OD, ec. sono fra se come le loro altezze PQ, ST, DB, ec. Ora la base OD del massimo triangolo ODB è la più grande; dunque la sua altezza DB è altresì la maggiore, ed è per conseguenza l'altezza dell'ungula.

517. COROLLARIO IV. *L'ungule della prima spezie, che hanno le lor basi ed altezze uguali, sono uguali: quelle, che han l'altezze disuguali e le basi uguali, sono fra se come le loro altezze: quelle, che hanno l'altezze uguali e le basi disuguali, sono fra loro come le lor basi; e quelle finalmente, che han le basi reciproche all'altezze, sono uguali.*

Sieno le due ungule ABCD, AECF (*Fig.* 341.) di basi ed altezze uguali: i massimi triangoli BDO, EOF di queste due ungule saranno uguali, poichè la base DO equivale alla base OF, amendue essendo raggi di circoli uguali; e l'altezza DB equivale all'altezza FE, per ipotesi: ora, entrambe l'ungule sono 'l prodotto del massimo triangolo moltiplicato per i due terzi del diametro AC, che quì è lo stesso; ond'elle sono uguali.

Ora supponiamo, che le due ungule ABCD, *abcd* (*Fig.* 342.) abbiano uguali le lor basi ADC, *adc*, e disuguali l'altezze DB, *db*; i loro massimi triangoli ODB, *odb* avendo le lor basi OD, *od* uguali, poichè son raggi di circoli uguali, sono fra essi come le loro altezze BD, *bd*: così, essendo l'ungule fra se come i loro massimi triangoli moltiplicati per i due terzi de' diametri AC, *ac* delle lor basi, che sono uguali, saranno fra loro come le rette, od altezze BD, *bd*.

Così pure, se disuguali sono le basi ADC, *adc*, ed uguali l'altezze BD, *bd*, i massimi triangoli OBD, *obd* sono fra loro come le lor basi OD, *od*; però, essendo l'ungule tra loro come i massimi triangoli moltiplicati per i due terzi de' diametri AC, *ac*, sono fra loro come $OD \times \frac{1}{3}AC$, $od \times \frac{1}{3}ac$: ma i due prodotti $OD \times AC$, $od \times ac$ son le metà de' quadri de' diametri AC, *ac*, e queste metà sono fra loro come i quadrati di essi diametri, siccome lo sono pure i terzi di queste metà, e le basi ADC, *adc*; dunque l'ungule sono fra loro come le lor basi ADC, *adc*.

Finalmente, se le basi ADC, *adc* son reciproche all'altezze DB, *db*, l'ungule saranno fra loro come $\frac{1}{2}OD \times DB \times \frac{2}{3}AC$, $\frac{1}{2}od \times db \times \frac{2}{3}ac$, o come $OD \times DB \times AC$, $od \times db \times ac$: ora, le basi ADC, *adc* sono fra loro come $OD \times AC$, $od \times ac$, che son le metà de' quadri dei lor diametri; onde l'ungule saranno fra lo-

ro come ADC × DB, *adc* × *db*: ma per ipotesi abbiamo ADC . *adc* : : *db*DB; onde facendo 'l prodotto degli estremi e quello de' medj, avremo ADC × DB = *adc* × *db*; e in consegnenza le due ungule saranno uguali.

518. COROLLARIO V. *Qualsivoglia ungula cilindrica della prima spezie è alla sfera, che dalla sua base verrebbe descritta girando intorno 'l suo diametro* AC (Fig. 340.), *come la sua altezza è alla circonferenza del massimo circolo.*

Se l'altezza DB del triangolo maggiore OBD equivale alla circonferenza del massimo circolo della sfera, detto triangolo è uguale al circolo (*N.* 378.): così l'ungula e la sfera saranno uguali; la prima, per essere il prodotto del triangolo OBD pe'due terzi del diametro, e l'altra, per essere il prodotto del massimo circolo, uguale al triangolo maggiore, pe'due terzi dello stesso diametro: ma se l'altezza DB del massimo triangolo OBD è maggiore, o minor della circonferenza del massimo circolo della sfera, detto triangolo non differirà dal triangolo, uguale al massimo circolo, che nell'altezza; e conseguentemente egli sarà al massimo circolo, come l'altezza DB è alla circonferenza: così l'ungula e la sfera saranno tra loro, come l'altezza DB moltiplicata per i due terzi di AC è alla circonferenza del massimo circolo moltiplicata pure per i due terzi di AC, e per conseguente come l'altezza DB è alla circonferenza del massimo circolo.

519. COROLLARIO VI. *Se un'ungula della prima spezie è segata da un piano* RST (Fig. 342.) *perpendicolare alla base* APC, *ed al piano inclinato* ABC, *le parti segate* ATSR, RSTBC *saranno fra loro come i segmenti corrispondenti della sfera* VAS, VCS.

Ciò risulta ad evidenza dal precedente Corollario.

520. PROBLEMA. *Essendo un'ungula cilindrica della prima specie segata da uno, o più piani perpendicolari alla base, ma non al piano inclinato, trovar la solidità delle differenti porzioni della stessa.*

Sia l'ungula ABCD (*Fig.* 342.) segata dal piano HMNR perpendicolare alla base ADC, e parallelo al diametro AC: questo piano sopra la base ADC sega una base ANRC, e dico; che la porzione d'ungula ANHMRC, segata dallo stesso, è all'ungula, come il solido descritto dalla fascia ANRC, girando intorno 'l diametro AC, è alla sfera descritta dalla base ADC girando intorno AC; il che io provo in questo modo.

Perpendicolare essendo il piano HMNR alla base ADC, egli è

pa-

parallelo a tutte l' altezze de' triangoli componenti l' ungula, perocchè anche quest' altezze son perpendicolari alla predetta base; dal che ne segue, ch' esso piano sega i triangoli colle linee parallele alle loro altezze, e ch'i triangoli componenti la porzione ANHMRC son simili fra loro ed ai triangoli componenti l' ungula, e sono in conseguenza come i quadri delle lor basi OZ, *ab*, ec. cioè come i quadri degli elementi della fascia ANCR della base ADC, o come i circoli descritti dagli stessi elementi girando intorno ad AC: così, essendo ciascun triangolo OXZ della porzione ANHMRC a ciascun triangolo OBD dell' ungula, come 'l circolo descritto dalla base OZ è al circolo descritto dalla base OD, egli è agevol cosa conchiudere; che tutt'i triangoli componenti la porzione ANHMRC, ovvero la porzione ANHMRC è a tutt' i triangoli componenti l' ungula, o alla stessa ungula, come tutt' i circoli degli Elementi della fascia ANRC, o come 'l solido descritto da detta fascia, ravvolgendosi intorno ad AC, è a tutt' i circoli degli Elementi della base ADR dell' ungula, o alla sfera.

Si proverà nello stesso modo, che la porzione ANHMRC (*Fig.* 343.) segata da un piano HNRM perpendicolare alla base ADC dell' ungula, ma non parallelo al diametro AC, è all' ungula, come 'l solido descritto dalla porzione ANRC della base, che ravvolgerebbes' intorno ad AC, è alla sfera, che descritta sarebbe dalla base ADC.

Egli è evidente, che se dall' ungula togliesi la data porzione ANHMRC, il residuo sarà l' altra porzione NHBMRD.

521. COROLLARIO. *Qualunque porzione* ANHMRC *d' un'ungula della prima spezie* ABCD (Fig. 342. 343.), *segata da un piano* HNRM *perpendicolare alla base* ADC, *è al solido descritto dalla porzione* ANRC, *che ravvolgerebbes' intorno 'l diametro* AC, *come l' altezza* DB *dell' ungula è alla circonferenza del massimo circolo della sfera.*

L' ungula è alla sfera descritta dalla sua base, come l' altezza DB del suo massimo triangolo è alla circonferenza del circolo maggiore della sfera (*N.* 518.): ma l' ungula è alla sfera, come la porzione ANHMRC è al solido descritto dalla porzione ANRC della base ADC, che ravvolgerebbes' intorno 'l diametro AC (*N.*520.); onde la porzione ANHMRC è a questo solido, come l' altezza AB dell' ungula è alla circonferenza del massimo circolo.

522. PROBLEMA. *Trovar la solidità d' un' ungula della seconda spezie.*

Sia

Sia l'ungula ABCD (*Fig.* 344.) , la cui base ADC è minor d'un semicircolo; egli è certo, che quest'ungula sarà pure composta d'infiniti triangoli rettangoli simili paralleli fra loro , e perpendicolari alla base ADC ed al piano inclinato ABC: così detti triangoli saranno fra loro come i quadri delle lor basi , o come i circoli, che sarebbero descritti da queste basi; ed in conseguenza l'ungula è al solido descritto dalla sua base ADC , ravvolgendos' intorno AC, come l'altezza BD del suo triangolo maggiore è alla circonferenza del massimo circolo del solido descritto dalla base DO dello stesso triangolo: ma siccome non ci è dato'l solido descritto dalla base ADC, girando intorno AC, così non possiamo nè meno conoscer l'ungula, quando non si ricorra al metodo de' centri di gravità, di cui parleremo in progresso. Frattanto, ecco ciò che s'avrà a fare.

Prolungo il piano inclinato ABC, finchè seghi l'asse LM del cilindro in un punto R. Taglio'l cilindro e'l piano inclinato con un piano XSVT, che passi pel punto R, e sia parallelo alla base del cilindro; e questo piano è un circolo segato al centro dal piano inclinato SBT: così l'ungula SBTX è della prima spezie, e per conseguente, da essa levando la parte SXTCDA , il residuo sarà l'ungula della seconda spezie ABCD.

Taglio l'ungula SBTX con un piano ACZQ perpendicolare alla base SXT, e la porzione ACZQST è al solido, che la sua base ZQST descriverebbe girando intorno ST, come l'ungula SBTX è alla sfera, che descritta sarebbe dalla sua base (*N.* 520.) : così io posso conoscer la parte ACZQST , e sottrarla dall' ungula SBTX, il che mi darà un residuo QXZCBA; onde da questo residuo levando la porzione cilindrica QXZCAD uguale al prodotto della sua base QXZ per la sua altezza XD, il residuo sarà la solidità dell'ungula ABCD.

Sia l'ungula ABCD della seconda spezie (*Fig.* 345.) , la cui base ADC è maggior d'un semicircolo. Pel punto O, in cui'l suo piano inclinato ABC sega l'asse, faccio passare un piano GEHF parallelo alla base del cilindro; e conseguentemente ho un' ungula EBFG della prima spezie, ch'io posso con facilità conoscere, ed a cui aggiugner debbo la porzione EGFCARDS: ora, la parte RDSFGE di questa porzione è facile a conoscersi, essendo ella 'l prodotto della sua base RDS moltiplicata per la sua altezza DG; dunque e' non mi resta che a trovar l'altra REFSCA.

Prolungo per tanto il piano inclinato , finchè seghi il lato opposto

posto del cilindro in N; il che mi dà un'ungula rovesciata della prima spezie ENFH, uguale all'ungula EBFG, per essere uguali le basi di quest'ungule, e medesima l'inclinazione de' loro piani: taglio l'ungula ENFH con un piano AVTC perpendicolare alla base, e la sua porzione AVTCFE (*N.* 520.) è facile a conoscersi. Ora la porzione cilindrica RACSFEVT, essendo 'l prodotto della sua base RSCA per la sua altezza RE, è nota; dunque, da questa porzione levando la parte AVTCFE, il residuo sarà la solidità dell'altra AREFSC: così egli ci sarà nota la solidità dell'ungula ABCD.

523. PROBLEMA. *Trovar la solidità d'un cilindro* ABPDH (Fig. 346.) *troncato per un piano inclinato* DPHB, *che passi per l'estremità* B *della base*.

Moltiplico la base AB del cilindro troncato per la metà della sua altezza, e 'l prodotto è la solidità cercata.

Poichè, se pel punto O, in cui 'l piano inclinato taglia l'asse RS, faccio passare un piano MDNH parallelo alla base del cilindro, egli sarà un circolo diviso in due parti uguali dal piano inclinato, che passa pel suo centro: così noi avremo due ungule della prima spezie PDHM, DBHN, le quali saranno fra loro uguali, per essere uguali le basi, e perchè i piani inclinati, facendo sopra le basi angoli uguali, formano altezze uguali MP, NB; quindi è, che a ciascuna di quest'ungule aggiugnendo la porzione cilindrica ABDHM avremo 'l cilindro AMNP uguale al cilindro troncato ABDPH: ora, il cilindro AMNP ha per altezza la linea AM metà della retta AP. Dunque, ec.

524. PROBLEMA. *Trovar la solidità d'un cilindro* ABCD (Fig. 347.) *troncato per un piano inclinato* DC, *che seghi i due lati* DA, CB *del cilindro*.

Piglio la metà MX della differenza DX dell' altezza maggior DA del cilindro troncato alla minore CB; aggiugno questa differenza alla minor' altezza CB, od AX, il che mi dà la retta AM; e moltiplicando la base AB del cilindro per AM, il prodotto è la solidità cercata.

Poichè, se pel punto O, in cui 'l piano inclinato sega l' asse, faccio passare 'l circolo MN, che sarà segato per mezzo da detto piano, avrò due ungule della prima spezie PDHM, PCHN uguali, a ciascuna di cui aggiugnendo la parte comune ABCHMP, avrò 'l cilindro ABNM uguale al cilindro troncato ABCD: ora, il cilindro ABNM ha per altezza la retta AM. Dunque, ec.

525. PRO-

525. PROPOSIZIONE CXVIII. *Se un circolo* ABCD (Fig.348.) *si ravvolge intorno una tangente* HP *parallela ad uno de' suoi diametri* BD, *il solido da esso descritto dopo l' intera sua rivoluzione sarà uguale ad un cilindro, ch' abbia per base il circolo* ABCD, *e per altezza una retta uguale alla sua circonferenza.*

Supponiamo, ch' il circolo ABCD (*Fig.* 349.) sia uguale al circolo ABCD della figura 348; concepisco, ch' il diametro DB parallelo alla tangente PH sia diviso in un' infinità di parti uguali, e che da tutt' i punti sieno tirate delle perpendicolari alla tangente PH, le quali vadano a terminare alla circonferenza in A, S, ec. Quando 'l circolo girerà intorno PH, il diametro AC perpendicolare alla tangente PH descriverà un circolo ∴ ma gli altri Elementi SV, ec. del circolo ABCD descriveranno delle corone, poichè ST descriverà un circolo, e la sua parte VT ne descriverà un' altro ; onde quello che descriverà SV sarà 'l circolo descritto da ST, meno 'l circolo descritto da VT, cioè una corona ; e così degli altri Elementi.

Alla fine, l' estremità D, B del diametro DB parallelo alla tangente PH descriveranno delle circonferenze; ed è manifesto, ch' il solido descritto dal circolo ABCD intorno questa tangente non differirà nè dalla somma del circolo descritto dal diametro, nè dalle corone descritte dagli altri Elementi, nè finalmente dalle circonferenze descritte da' punti D, B.

Ora, sopra l' estremità A del diametro AC io alzo una retta AR perpendicolare al piano del circolo ABCD ; e facendo la stessa AR uguale alla circonferenza, che descriverebbesi dal diametro AC ravvolgendos' intorno a PH, tiro la retta RC ; il che mi dà un triangolo CAR uguale al circolo, che dal diametro AC sarebbe descritto intorno PH (*N.*378.): parimente, se sopra l' estremità della linea ST io alzo una retta SZ perpendicolare al circolo, e in conseguenza parallela ad AR, e ch' io faccia SZ uguale alla circonferenza, che da ST sarebbe descritta intorno a PH ; il triangolo TSZ, ch' io formerò tirando ZT, sarà uguale al circolo descritto da ST intorno a PH ; e conducendo in questo stesso triangolo la retta VX parallela ad SZ, il triangolo TVX simile al triangolo TSZ sarà uguale al circolo, che TV descriverebbe intorno PH ; poichè avremo ST . SZ ∴ TV . VX ∴ ma SZ è la circonferenza del raggio ST ; onde VX sarà quella del raggio TV, e conseguentemente TVX sarà uguale al circolo del raggio TV: così 'l trapezoide SZXV sarà uguale alla corona, che da SV sarebbe descritta

gi-

girando intorno PH. Però facendo lo stesso rispetto agli altri elementi del circolo (come vedesi dalla figura), e sopra i punti D, B alzando delle perpendicolari uguali alle circonferenze, che da detti punti sarebbero descritte intorno PH, il triangolo ARC, congiunto ai trapezoidi formati sopra gli Elementi del circolo, e alle due perpendicolari alzate sopra i punti D, B, sarà uguale al circolo, che descriverebbe AC, sommato alle corone, che descritte sarebbono dagli Elementi, ed alle circonferenze, che descriverebbero i punti D, B.

Ora, il solido composto del triangolo ARC, e de' trapezoidi fatti sopra gli Elementi del circolo, ed uniti alle rette sopra i punti D, B, forma un cilindro troncato, che ha per base il circolo ABCD, e per altezza la retta AR uguale alla circonferenza, che descriverebbe il diametro AC intorno PH; poichè, simili essendo e rettangoli tutt' i triangoli CAR, TSZ, TVX, gli angoli, ch'essi formano sopra PH, son'uguali; e in conseguenza le loro ipotenuse, essendo fra se parallele, formano un piano inclinato, e le loro altezze AR, SZ, VX, ec. formano la superficie d' un cilindro troncato da detto piano; onde 'l solido compreso sotto tutte queste linee è un cilindro troncato da un piano inclinato, che passa per l'estremità della sua base. Posto dunque, che sia questo cilindro rappresentato dalla Figura 350, la sua solidità equivale alla sua base moltiplicata per la metà AM della sua altezza AR (*N*.523.): ma essendo AR la circonferenza del diametro, la sua metà AM è la circonferenza del raggio CO metà del diametro, cioè la circonferenza della base; onde 'l cilindro troncato ACR, e per conseguente il solido, che descriverebbe la base AC intorno PH, equivale alla base AC moltiplicata per la sua circonferenza.

526. Il solido descritto da un circolo ABCD (*Fig*. 348.), mentre si ravvolge intorno una tangente PH, dicesi *Anello chiuso*, perchè il voto BHCSD, che ritrovasi nel mezzo, non è traforato: la parte di questo solido descritta dal semicircolo BCD appellasi *Parte interiore*: quella descritta dal semicircolo BAD si dice *Parte esteriore*; e 'l circolo ABCD chiamasi *Circolo genitor* dell'anello.

527. COROLLARIO I. *La parte esteriore d'un'anello equivale alla metà del cilindro, che abbia per base il circolo genitore dell' anello, e per altezza la circonferenza, più una Sfera, ch'abbia per massimo circolo il genitore.*

Il circolo AC (*Fig*. 350.), girando intorno PH, produce un' anello chiuso uguale al cilindro troncato ACR: ora, essendo tutt' i

Punti del diametro DB del semicircolo DCB equidistanti da PH, Producono, girando intorno a PH, delle circonferenze perfettamente uguali a quella del raggio CO, e per conseguente alla retta AM, o DS; onde sopra tutt'i punti di esso diametro alzando delle rette uguali a DS, e perpendicolari al circolo AC, formeranno un rettangolo DSNB, e'l solido DSNBC sarà uguale alla parte interiore dell'anello; dunque'l solido DABRNS equivarrà alla parte esterior dello stesso.

Ma questo solido è composto della parte DABNMS uguale alla metà del cilindro AT, che ha per base il circolo genitore e per altezza la circonferenza di detta base, e d'un'ungula SMNR, che ha per base il semicircolo SMN uguale al semicircolo della base AC e per altezza la retta MR; ed è uguale alla Sfera, che sarebbe descritta dalla sua base girando intorno'l suo diametro (*N.*518.). Dunque, ec.

528. COROLLARIO II. *La parte interior d'un'anello chiuso equivale alla metà del cilindro, che abbia per base il circolo genitore, e per altezza la circonferenza, meno una Sfera, il cui massimo circolo sia'l genitore.*

La parte interior' equivale al solido DSNBC (*Fig.* 350.), cioè al semicilindro DCBNTS, meno l'ungula rovesciata SNTC uguale all'ungula SMNR. Dunque, ec.

529. PROBLEMA. *Trovar' il voto* BRCSD (Fig. 348.), *che lascia'l circolo* ABCD *rivolgendosi intorno la sua tangente* PH.

Dall'estremità B, D del diametro BD tiro le rette BO, DX perpendicolari alla tangente PH; il che forma un rettangolo BOXD, che girando intorno PH produce un cilindro BRSD, mentre 'l semicircolo iscritto in detto rettangolo produce la parte interiore dell'anello; dunque, dal cilindro BRSD levando la parte interior dell'anello, il residuo sarà'l voto ricercato BRCSD.

NOTA. Che la metà di questo voto, cioè la parte DCS, è un cono curvilineo, il cui lato DC è un quarto di circonferenza di circolo; e che si possono conseguentemenie misurar simili coni, nella stessa maniera che misuransi le piramidi curvilinee, i cui limiti sono quarti di circonferenza convessi dalla banda dell'asse, come vedremo nel Problema seguente.

530. PROBLEMA. *Trovar la solidità d'una piramide* ABCDE (Fig. 351.), *i cui limiti* AE, BE, ec. *sono quarti di circonferenza di circolo convessi dalla banda dell'asse* OE.

Alla base circonscrivo un circolo DABC; il che si può sempre fare,

fare, perocchè le linee AO, DO, OB, OC tirate dagli angoli della base al centro O esser debbono sempre uguali fra loro, e all' altezza OE, se pur vogliamo ch'i limiti AE, BE sieno quarti di circonferenza; e concepisco un cono, il quale per lo precedente Problema m'è noto, ch'abbia per base il circolo ABCD, e'l cui lato sia 'l limite AE.

Concepisco pure, ch'il cono e la piramide sien segati da infiniti piani paralleli alle lor basi, i quali nel cono saranno de' circoli, come LFGH, e nella piramide de' piani LFGH simili alla base, poichè le lor diagonali ed i loro lati son paralleli a quei della base; dal che n'avviene, che detti piani LFGH, ec. son parimente iscritti ne' circoli LFGH, ec. così ciascun piano LFGH della piramide sarà al circolo corrispondente LFGH del cono, come la base ABCD della piramide al circolo ABCD, ch'è la base del cono; e perconseguenza la piramide è al cono, come la base ABCD al circolo ABCD. Onde per la Regola del Tre io dico: il circolo ABCD è alla base ABCD, come'l cono è ad un quarto termine, che sarà la piramide cercata.

DIFFINIZIONE. Se un circolo ABCD (*Fig.* 352.) gira intorno una retta PH perpendicolare al diametro AC prolungato in O, e parallela al diametro BD, il solido descritto dopo la rivoluzione dicesi *Anello aperto*, poichè lascia intorno PH un foro BCDSQR: la parte del solido descritta dal semicircolo BAD appellasi *Parte interior dell' anello*: quella descritta dal semicircolo BAD dicesi l'*esteriore*; e'l circolo ABCD si è 'l genitore.

531. PROPOSIZIONE CXIX. *La solidità d' un' anello aperto equivale ad un cilindro, ch'abbia per base il circolo genitore* ABCD, *e per altezza una linea uguale alla circonferenza descritta dal suo centro* X *intorno a* PH.

Concepisco, ch'il circolo sia diviso ne' suoi Elementi paralleli al diametro, e prolungati fino in PH (*Fig.* 353.). Girando il circolo, dalla linea AO se ne descriverà uno intorno PH, e la sua parte OC ne descriverà un'altro; e conseguentemente il diametro AC descriverà una corona, cioè 'l circolo del raggio AO, meno quello del raggio CO. Quindi, anche gli altri Elementi, come SV, descriveranno delle corone, e l' estremità D, B descriveran delle circonferenze, che unite alle corone degli Elementi formeranno insieme l' anello. Concepisco, che sopra l' estremità A sia alzata una retta AR perpendicolare al piano del circolo ABCD, e uguale alla circonfe-

ferenza, che da questo punto sarebbe descritta intorno PH; e tirando la retta RO, il triangolo ARO equivale al circolo, che la retta AO descriverebbe intorno a PH: parimente, sopra 'l punto C alzando una retta CL perpendicolare al circolo, ed uguale alla circonferenza, che sarebbe descritta dalla retta CO, il triangolo COL equivale al circolo, che sarebbe descritto da CO; e siccome questo è simile al triangolo AOR, la sua ipotenusa LO è una porzione dell' ipotenusa OR: così 'l trapezoide RACL è uguale alla corona, che descriverebbe AC; e facendo lo stesso rispetto agli altri Elementi SV, ec. s'avranno tanti trapezoidi SZKV, ec. uguali alle corone dell'anello ciascuno a ciascuna. Finalmente, sopra l'estremità D, B del diametro alzando delle rette uguali alle circonferenze da esse descritte, queste due rette congiunte ai trapezoidi faranno uguali all'anello.

Ora, tutte l'altezze di questi trapezoidi forman la superficie d' un cilindro, e l'ipotenuse RO, ZT, ec. formano un piano inclinato, che sega detta superficie, e che non passa l' estremità della base ABCD; onde tutte queste linee racchiudono un cilindro troncato da un piano inclinato, che sega i suoi lati opposti.

Supponendo però, che questo cilindro sia rappresentato dalla Figura 354, la sua solidità equivale alla sua base AC moltiplicata per l'altezza AM uguale all'altezza minore AF, più la metà MF della differenza RF dell'altezze RA, LC (*N.* 524.) : ma AM = XQ, e a motivo de' triangoli simili RAO, QXO abbiamo OA. AR : : OX. XQ; essendo dunque AR uguale alla circonferenza di AO, avremo XQ uguale alla circonferenza di OX, e per conseguente l'anello è uguale al cilindro, che ha per base il circolo genitore, e per altezza una retta uguale alla circonferenza, che dal suo centro X sarebbe descritta intorno PH.

532. COROLLARIO I. *La parte interiore dell' anello equivale alla metà del cilindro* AMNEC (Fig. 354.) *uguale all' anello, meno un' ungula* SNLE *uguale alla Sfera, il cui massimo circolo sia 'l genitore.*

Mentre il semicircolo BCD gira intorno PH, tutt' i punti del diametro DB, essendo equidistanti da PH, descrivono delle circonferenze uguali alla retta XQ. Onde sopra tutti questi punti alzando delle perpendicolari uguali ad XQ, avremo 'l parallelogrammo DSNB; e conseguentemente il solido DCBNLS è uguale alla parte interior dell' anello. Ora, perchè questo solido sia uguale al semicilindro DCBNES, mancavi un' ungula NSLE, ch' abbia per base il se-

ſemicircolo NES uguale al ſemicircolo genitore, e per altezza la retta EL uguale alla metà della differenza RF dell' altezze RA, LC ma eſſendo RA uguale alla circonferenza del raggio AO, e CL uguale a quella del raggio CO, la differenza RF equivaler dee alla circonferenza, che deſcritta ſarebbe dal diametro AC, ch' è la differenza de' raggi AO, CO; la metà MF è dunque uguale alla circonferenza della metà CX del diametro, cioè alla circonferenza ABCD; e conſeguentemente l' ungula SNEL equivale alla Sfera, che per maſſimo circolo abbia il genitore (*N.* 518.). Dunque, ec.

533. COROLLARIO II. *La parte eſterior dell' anello aperto equivale alla metà del cilindro* AMNEC (Fig. 354.), *che ha per baſe il circolo genitore* AC, *più un' ungula* SMNR *uguale alla Sfera, il cui maſſimo circolo ſia'l genitore.*

Per lo precedente Corollario, la parte interior dell' anello equivale alla parte cilindrica DBCNSL; onde, poichè l' intero anello è uguale al cilindro troncato ACLR, la parte eſterior dee equivalere al reſiduo DABNSR: ma queſto reſiduo è compoſto del ſemicilindro DABNSM, più l' ungula SMNR uguale all' ungula SENL. Dunque, ec.

534. PROBLEMA. *Trovar la ſolidità del voto* BCDSQR (Fig. 352.) *d' un' anello aperto.*

Dall' eſtremità D, B del diametro DB parallelo alla retta HP tiro le rette BF, DZ perpendicolari ad HP, ciò che forma un rettangolo BFZD. Ora, mentre 'l circolo ABCD gira intorno HP, queſto rettangolo deſcrive un cilindro BRSD, e'l ſemicircolo BCD deſcrive la parte interior dell' anello; dunque, dal cilindro BRSD ſottraendo la parte interiore, il reſiduo è la ſolidità del voto BCDSQR.

NOTA. Che la metà di queſto voto, cioè CDSQ forma un cono troncato parallelo alla ſua baſe pel circolo deſcritto da CO, e'l cui lato è un quarto di circonferenza di circolo CD, conveſſo dalla banda dell' aſſe OP; e che per conſeguente miſurar ſi poſſono ſomiglianti coni, non meno che le piramidi troncate per un piano parallelo alle lor baſi, e i cui limiti ſono de' quarti di circonferenza di circolo, ſiccome ora vedremo nel Problema ſeguente.

535. PROBLEMA. *Trovar la ſolidità d' una piramide* ABCDEFHG (Fig. 355.) *troncata per un piano* EFHG *parallelo alla ſua baſe* ABCD, *e li cui limiti* AF, BH, ec. *ſono de' quarti di circonferenza di circolo conveſſi dalla banda dell' aſſe.*

Alla

Alla base ABCD io circonscrivo un circolo, e concepisco un cono troncato, ch'abbia per lato il quarto di circonferenza di circolo AF: concepisco in oltre, che'l cono e la piramide sieno tagliati da infiniti piani paralleli alle lor basi; e questi nel cono faran de' circoli, e nella piramide de' piani simili alla base ABCD. Così tutt' i circoli del cono saranno fra loro come tutt' i piani della piramide, o come'l circolo della base del cono è al piano della base della piramide: ma io conosco il cono, come si è veduto nella nota del precedente Corollario; dunque non ho che a dire: la base del cono è al cono, come la base della piramide è ad un quarto termine; che sarà appunto la piramide.

536. PROBLEMA. *Trovar la solidità d'un solido a berretta, cioè d'una piramide, i cui limiti sono de' quarti di circonferenza concavi dalla banda dell'asse.*

Sia'l solido ABCDE (*Fig. 356.*), che ha per base il parallelogrammo ABCD, e i cui limiti AE, BE, ec. sono de' quarti di circonferenza concavi entro'l solido: tiro dalla base le diagonali AC, BD, e dal punto O, ov'elle si segano, innalzo perpendicolarmente alla base la retta OE, che sarà l'asse del solido; poichè essendo le rette AO, OE perpendicolari fra loro, conviene, ch' abbraccino un quarto di circonferenza AE, e per la stessa ragione le rette DO, OE debbono abbracciare un quarto di circonferenza; e così dell'altre. Concepisco, ch' il solido sia segato da infiniti piani paralleli alla base, come FGHL; e tutti questi saran simili fra loro e alla base, per essere le lor diagonali come pure i loro lati paralleli ciascuno a ciascuno; ciò che rende gli angoli parimente uguali ciascuno a ciascuno (*N. 479.*), e per conseguenza i triangoli formati dalle diagonali son simili. Così questi piani saranno fra loro come i quadri delle lor diagonali FH, AC, o semidiagonali FR, AO: ma queste semidiagonali sono gli Elementi del quarto di circolo AEO; onde tutt' i piani sono fra loro come i quadri, o come i circoli descritti dagli Elementi FR, ec. che si ravvolgerebbero intorno'l raggio fisso EO. Ora detti circoli comporrebbono una semisfera, e per avere il valor della loro somma, si dee moltiplicar' il maggiore per i due terzi dell' altezza OE; dunque per avere il solido ABCD convien moltiplicare il piano maggiore ABCD per i due terzi dell'altezza OE.

NOTA. Ciò dicasi di tutte le berrette, che han per base de' poligoni regolari, siccome quello s'è detto sopra (*N. 530. 535.*) circa le piramidi, che hanno per limiti de' quarti di circonferenza con-

convessi verso l'asse, intender deesi di tutte le piramidi di tal natura, che hanno per base de' poligoni regolari.

537. DIFFINIZIONE. I Solidi composti d'uno stesso numero di facce simili ciascuna a ciascuna diconsi *Solidi simili*.

538. PROPOSIZIONE CXX. *I parallelepipedi, i prismi, o cilindri simili sono fessi come i cubi delle loro altezze o de' lati omologhi delle lor basi, o come i cubi de' circuiti di dette basi, o finalmente come quelli d'alcune linee similmente poste.*

Sieno i due parallelepipidi simili AE, *ae* (*Fig.* 357.); il primo equivale al prodotto della sua base ABCD per la sua altezza AH, e 'l secondo equivale a quello della sua base *abcd* per la sua altezza *ab*; i due solidi son dunque fra loro come questi prodotti: ma simili essendo le basi ABCD, *abcd*, elle sono fra lor come i quadri de' loro lati omologhi AB, *ab*; onde il primo solido è al secondo, come 'l quadro $\overline{AB}^2$ moltiplicato per l'altezza AH è al quadro $\overline{ab}^2$ moltiplicato per l'altezza *ab*: ora, simili essendo le facce HABN, *habn*, l'altezze AH, *ab* sono fra loro come i lati AB, *ab*; però il primo solido è al secondo, come 'l quadro $\overline{AB}^2$ moltiplicato per AB è al quadro $\overline{ab}^2$ moltiplicato per *ab*, cioè come 'l cubo $\overline{AB}^3$ del lato AB è al cubo $\overline{ab}^3$ del lato omologo *ab*.

Ma i cubi $\overline{AB}^3$, $\overline{ab}^3$ de' lati omologhi AB, *ab* sono fra loro come i cubi de' lati omologhi AH, *ab*; dunque i solidi simili AE, *ae* sono altresì come i cubi della loro altezza: e si proverà nello stesso modo, ch' essi sono come i cubi de' circuiti delle lor basi, ec. a motivo ch' i circuiti delle basi simili sono fra se come i loro lati omologhi; e questa stessa dimostrazione serve per i prismi e cilindri simili, poichè le basi de' cilindri sono de' poligoni d'infiniti lati.

539. COROLLARIO I°. *Le piramidi e i coni simili sono fra se come i cubi delle loro altezze, o de' loro lati omologhi.*

Le piramidi sono i terzi de' prismi d'uguale altezza; se dunque simili son le piramidi, simili pure sono i loro prismi, poichè l'altezze esser debbono fra se come i lati omologhi delle basi: ma i prismi simili sono come i cubi de' loro lati omologhi; onde le piramidi simili, che sono i terzi de' prismi, son pure come i cubi de' loro lati omologhi: e lo stessi dicasi de' coni simili, i quali altro non sono che piramidi, le cui basi hanno infiniti lati.

540. CO-

540. COROLLARIO II. *Tutte le sfere son simili, e per conseguente sono fra lor come i cubi de' loro diametri.*

La sfera ABCD (*Fig.* 358.) equivale al suo massimo circolo AC moltiplicato per i due terzi del diametro BD (*N.* 510.), e la sfera *abcd* equivale al prodotto del suo massimo circolo *ac* per i due terzi del diametro *bd*: ma simili essendo i due circoli AC, *ac*, essi sono come i quadri de' loro diametri, o de' diametri BD, *bd*; dunque la sfera ABCD è alla sfera *abcd*, come $\overline{AC}^2 \times \frac{2}{3}AC$ ad $\overline{ac}^2 \times \frac{2}{3}ac$, o come $\overline{AC}^3$ è ad $\overline{ac}^3$.

541. COROLLARIO III. *L' ungule simili sono fra loro come i cubi delle loro altezze, o de' diametri delle lor basi, ec.*

Se l' ungule simili ABCE, *abce* (*Fig.* 359.) son della prima spezie, la prima equivale al suo massimo triangolo BED moltiplicato per $\frac{2}{3}AC$ (*N.* 515.), e la seconda al suo massimo triangolo *bed* moltiplicato per $\frac{2}{3}ac$: ma simili essendo per ipotesi i due massimi triangoli, essi sono fra loro come i quadri $\overline{BD}^2$, $\overline{bd}^2$ delle lor basi BD, *bd*; onde l' ungule sono fra loro come $\overline{BD}^2 \times \frac{2}{3}AC$, $\overline{bd}^2 \times \frac{2}{3}ac$, o come $\overline{BD}^2 \times AC$, $\overline{bd}^2 \times ac$: ora BD, *bd* :: AC. *ac*; le due ungule son dunque fra loro come $\overline{BD}^2 \times BD$, $\overline{bd}^2 \times bd$, o come $\overline{BD}^3$. $\overline{bd}^3$.

Se l'ungule simili ABCE, *abce* (*Fig.*360.) sono della seconda spezie, tal che le lor basi ABC, *abc* sien minori ciascuna d'un semicircolo, si potran sempre considerare come porzione d' altre ungule simili della prima spezie NMRE, *nmre*, ch' avran per basi de' semicircoli; ed allora le due ABCE, *abce* saranno fra loro come l'ungule NMRE, *nmre* ; perchè le basi, od i segmenti simili ABC, *abc* saranno fra se come le basi, od i semicircoli NMR, *nmr*, e l'altezze BE, *be* come l'altezze ME, *me*; dunque l'ungule ABCE, *abce* saranno fra loro come $\overline{ME}^3$. $\overline{me}^3$, o come $\overline{BE}^3$. $\overline{be}^3$.

Con somigliante discorso si proverà, che l'ungule simili della seconda spezie, le quali hanno per basi de' segmenti maggiori del semicircolo, sono fra se come i cubi delle loro altezze.

542. COROLLARIO. *Generalmente tutt' i solidi simili, in qualunque modo sien composti, sono fra se come i cubi de' loro lati omologhi.*

Im-

Imperocchè, se in questi solidi piglinsi de' punti similmente posti, e che da ciascun'angolo delle lor facce si tirino delle rette a detti punti, si disciolgono i solidi in tante piramidi fra loro simili, le quali saran come i cubi de' loro lati omologhi; e per conseguenza i solidi composti di queste piramidi saranno nella stessa ragione.

Del cambiamento de' Solidi.

543. Dalle cose predette agevol sia comprendere, che una piramide può esser cangiata in un parallelepipedo, o prisma, la cui base sia uguale a quella della piramide, e la cui altezza sia parimente'l terzo dell'altezza della piramide; ch'un prisma, o parallelepipedo si può ridurre in piramide, e ch'una sfera può cangiarsi in un cilindro, o in un'ungula, ec. e perciò basterà, che io dia quì alcune regole generali per cangiare un solido in un'altro, o per fare un solido uguale a molti altri, o finalmente per rendere un solido simile ad un'altro.

544. PROBLEMA. *Dato un parallelepipedo* AB (Fig. 361.) *ritrovarne un'altro, che li sia uguale, e ch'abbia per altezza una data retta* ae.

Dovendo il parallelepipedo, ch'io cerco, equivalere al parallelepipedo AB, la sua altezza *ae* esser dee all' altezza AE, reciprocamente, come la base ACHD è alla base cercata *acbd* (N.497.), a cui io do la dimensione *ad*, uguale alla dimensione AD della base ADCH; ed allora la base ABCD sarà alla base cercata *abcd*, come l'altra dimensione AC è alla dimensione cercata *ac*; quind' io dirò: l'altezza *ae* è all'altezza AE, reciprocamente, come AG è ad un quarto termine, il quale trovato colle regole ordinarie sarà la retta *ac*. Facendo dunque coll' altezza *ae* un parallelepipedo sopra la base *dacb*, il parallelepipedo *ab* sarà uguale al parallelepipedo AB.

545. PROBLEMA. *Dato un parallelepipedo* AB (Fig. 361.) *ritrovarne un'altro, che li sia uguale, e ch'abbia una base data.*

Se la data base *acbd* ha una dimensione *da* uguale alla dimensione DA della base DACH, le due basi sono fra loro come le dimensioni *ac*, AC; però io dico: la base *dacb* è alla base DACH, cioè la dimensione *ac* è alla dimensione AC, reciprocamente, come l'altezza AE è ad un quarto termine, il quale trovato colle regole ordinarie mi dà l'altezza *ae*, cui debbo dare al parallelepipedo *ab*, che sarà uguale al parallelepipedo AB.

Ma ſe la data baſe *dpqr* non ha una comun dimenſione colla baſe DACH, io la cangio in un'altra *dacb*, che ſia uguale a *dpqr*, e ch'abbia la dimenſione *da* uguale alla dimenſione DA, dicendo: *da* è a *dp*, reciprocamente, come *dr* è a *db*; poi termino il reſtante come prima.

NOTA. Che per dimenſione ſi dee ſempre intendere una linea perpendicolare all'altra dimenſione; eſſendo già noto, che le dimenſioni de' piani ſono lunghezza e larghezza, e che queſte quantità eſſer debbono fra loro perpendicolari.

546. PROBLEMA. *Dati due parallelepipedi* AC, ac (Fig.362.) *ritrovarne un terzo, che lor ſia uguale.*

Cerco di dare al parallelepipedo *ac* un'altezza uguale all'altezza AM del parallelepipedo AC, e però cangio prima la ſua baſe *an* in un'altra *pq*, ch'abbia la dimenſione *dp* uguale alla dimenſione DA; e 'l parallelepipedo *pb*, fatto ſopra la baſe *pq* coll'altezza *am*, equivale al parallelepipedo *ac*. Ora io dico: l'altezza AM, cui dar voglio al parallelepipedo *pb*, è alla ſua altezza *am*, reciprocamente, come *pr* è ad un quarto termine RF; e facendo con RF una baſe RT, ch'abbia la dimenſione RN = *dp*, il parallelepipedo RS, formato ſopra la baſe RT coll'altezza RQ = AM, equivarrà al parallelepipedo *pb*, od *ac*; e per conſeguenza il parallelepipedo AS ſarà uguale ai due dati.

547. COROLLARIO I°. *Nella ſteſſa maniera ſi può formare un parallelepipedo uguale a molti parallelepipedi, e cubi.*

548. COROLLARIO II. Per formare un parallelepipedo uguale alla ſomma d'un parallelepipedo e d'un priſma, la cui baſe ſia, per modo d'eſempio, un pentagono, riducaſi la baſe del priſma in triangolo, e'l triangolo in rettangolo; e conſeguentemente il parallelepipedo, che ha per baſe queſto rettangolo, e per altezza l'altezza del priſma, ſarà uguale al priſma; per lo che io non avrò a fare ch'un ſol parallepipedo uguale ai due, come ſopra.

Si può ſimilmente fare un parallelepipedo uguale a due, o più piramidi, col ridurre prima le piramidi in parallelepipedi: ſiccome puoſſi ancora formar una piramide uguale a molte altre, riducendo prima tutte le piramidi in parallelepipedi, poi facendo un parallelepipedo uguale alla ſomma de' parallelepipedi; quindi una piramide uguale al parallelepipedo totale, cioè triplicando l'altezza di detto parallelepipedo, mercè ch'una piramide, la quale abbia la ſteſſa baſe d'un parallelepipedo e 'l triplo dell'altezza, equivale al parallelepipedo.

Null'

Null'altro io aggiugno, perocchè voglio, ch'i principianti abbiano'l contento di ritrovare da per sè moltissimi altri cambiamenti, i quali mediante le cose predette far si possono sopra i solidi.

549. PROBLEMA. *Esprimere in linee la ragione di più solidi.*

Cangio i dati solidi in tanti parallelepipedi, le cui basi abbiano una dimension comune, e l'altezza uguale; ed allora tutt'i detti parallelepipedi saranno fra loro come le dimensioni disuguali delle lor basi, e però queste dimensioni esprimeranno'l rapporto de'solidi dati.

550. PROBLEMA. *Fare un cubo, il quale sia ad un'altro in qualsivoglia ragione.*

Posto che cerchisi un cubo doppio del cubo AB (*Fig.* 363.), si piglia una retta AH doppia del lato di AC, e quindi due medie proporzionali infra AH, ed AC; il che si fa mediante 'l compasso di proporzione, come vedremo in fine del presente Capitolo; e'l cubo formato sopra la prima delle due medie sarà doppio del cubo AB. Poichè, chiamando b la prima delle due medie, e c la seconda, abbiamo : : AC. b. c. AH; e però $\overline{AC}^3 . b^3$: : AC. AH (*Lib.* I°. *N.* 327.) : ma AC è la metà di AH, per la costruzione; dunque'l cubo $\overline{AC}^3$, od AB è la metà del cubo fatto sopra b.

Se cercasi un cubo, il quale non sia che'l terzo del cubo AB, piglio'l terzo AD del lato AC, e quindi due medie proporzionali m, n infra AC, e AD, il che mi dà : : AC. m. n. AD; dunque $\overline{AC}^3 . m^3$: : AC. AD: ma AC è'l triplo di AD; onde il cubo $\overline{AC}^3$, od AB è'l triplo del cubo formato sopra la prima media proporzionale m.

Se finalmente si cerca un cubo, il quale sia al cubo AB, come una data linea a è ad una data linea b, cerco una quarta proporzionale x alle due date linee b, a, ed al lato AC; il che mi dà b. a : : AC. x, od x. AC : : a. b; od AC. x : : b. a. Cerco due medie proporzionali infra AC ed x, ed ho : : AC. m. n. x; dunque $\overline{AC}^3 . m^3$: : AC. x : : b. a; e per conseguenza il cubo formato sopra AC, cioè'l cubo AB è al cubo formato sopra la prima media proporzionale m, come b è ad a.

551. PROBLEMA. *Fare un cubo uguale a un dato parallelepipedo* AB (Fig. 364.).

Riduco la base AC del parallelepipedo in un quadro MP, che

le sia uguale; e moltiplicando MP per l'altezza MQ uguale all' altezza AE del dato parallelepipedo, ho 'l parallelepipedo MN uguale al parallelepipedo AB. Cerco due medie proporzionali m, n fra 'l lato MR del quadro MP, e l'altezza MQ, od AE; e 'l cubo formato sopra la prima media m equivale al parallelepipedo MN, e per conseguenza ad AB.

Poichè, per la costruzione, abbiamo : : MR . m . n . MQ; dunque $\overline{MR}^3 . m^3 :: MR . MQ$; e facendo 'l prodotto degli estremi e quello de' medj, si ha $\overline{MR}^3 \times MQ = m^3 \times MR$; e dividendo 'l tutto per MR, avremo $\overline{MR}^2 \times MQ = m^3$: ma $\overline{MR}^2 \times MQ$ è 'l parallelepipedo MN, od AB; ond'egli è uguale al cubo di m^3.

552. COROLLARIO. *Puossi mediante ciò rendere un cubo uguale a più cubi, parallelepipedi, piramidi, o figure di differente spezie, riducendo prima ciascuna figura in un parallelepipedo uguale a tutte le date, e poscia in un cubo uguale al detto parallelepipedo.*

553. PROBLEMA. *Dati due solidi simili* AC, ac (Fig. 365.) *ritrovarne un' altro* PX *uguale alla somma dei due, e a loro simile.*

Cerco un cubo uguale ai due dati solidi, e suppongo, che la linea s sia 'l lato di detto cubo; cerco parimente un cubo uguale all'uno de' dati solidi, p. e. ad ac, e suppongo, che 'l lato di questo cubo sia la retta r; poi dico: il lato r è al lato ad del solido ac, come la retta s è ad un quarto termine, ch'io chiamo PQ, e che sarà il lato omologo del solido, cui cerco. Dico pure: il lato r è al lato am, come 'l lato s è ad un quarto termine, ch'io chiamo PR, e che sarà un'altro lato omologo del solido, cui cerco. Dico finalmente: il lato r è all'altezza ae, come 'l lato s è da un quarto termine PT, che sarà l'altezza del solido cercato. Facendo dunque colle tre dimensioni PQ, PR, PT il solido PX, egli sarà uguale ai due dati, e sarà loro simile.

Poichè, per la costruzione, abbiamo $r . ad :: s . PQ$, poi $r . am :: s . PR$, finalmente $r . ae :: s . PT$; e moltiplicando insieme queste tre proporzioni, cioè gli antecedenti per gli antecedenti ed i conseguenti per i conseguenti, avremo $r^3 . ad \times am \times ae :: s^3 . PQ \times PR \times PT$: ma $r^3 = ad \times am \times ae$; dunque $s^3 = PQ \times PR \times PT$. Ora, s^3 è 'l cubo uguale ai due dati solidi; onde $PQ \times PR \times PT$, o 'l solido PX è altresì uguale ai detti due solidi; e loro è in oltre simile, per essere le sue dimensioni PQ, PR, PT simili a quelle del picciolo solido ac.

NOTA.

NOTA. Ometto moltiſſimi altri Problemi a ciò ſpettanti, perocchè ſi poſſono agevolmente riſolvere coi principj da me ſopra ſtabiliti.

Delle Superficie de' Solidi.

554. Ne' ſolidi, i quali hanno una, o più baſi, come le piramidi, i coni, le ſemisfere, i parallelepipedi, priſmi, cilindri, ec. per *Superficie* s'intende 'l valore de' piani, o lati curvi aſcendenti, ſenza che ſieno compreſi le baſi; e per *Superficie totale* intendeſi, quando inſieme co' piani e lati curvi aſcendenti ſono compreſe anche le baſi.

555. PROPOSIZIONE CXXI. *La ſuperficie di un parallelepipedo, d'un priſma, o d'un cilindro retto equivale al perimetro della ſua baſe moltiplicato per l'altezza del ſolido.*

Sia 'l parallelepipedo AB (*Fig. 361.*); altro non è la ſua ſuperficie che la ſomma dei quattro rettangoli aſcendenti compreſi fra le ſue due baſi: ora, ciaſcuno di queſti rettangoli è 'l prodotto della ſua baſe per la ſua altezza, ed in ciaſcun di loro l'altezza è uguale; onde queſti quattro rettangoli ſono 'l prodotto delle lor quattro baſi AC, CH, HD, DA per l'altezza AE, cioè 'l prodotto del perimetro, o contorno ACHD per l'altezza AE.

Lo ſteſſo ſi proverà de' priſmi e cilindri retti; imperocchè le baſi dei cilindri eſſendo de' poligoni d'infiniti lati, le loro ſuperficie, quando ſon retti, altro non ſono ch' un' infinità di rettangoli, i quali tutti per altezza han l'altezza del cilindro.

556. COROLLARIO I°. Per miſurare la ſuperficie d'un parallelepipedo inclinato AC (*Fig.366.*), e' convien neceſſariamente miſurar' a parte i piani aſcendenti; imperocchè, quantunque succeder poſſa, che le due facce AEFD e la ſua parallela BHCO ſieno ancora de' rettangoli, ciò non oſtante la faccia ABHE e la ſua parallela DOCF ſaran ſempre de' parallelogrammi, i cui lati ſaranno inclinati; tal che la faccia ABHE non ſarà 'l prodotto della ſua baſe AC per la lunghezza AE, là dove la faccia AEFD ſarà uguale alla ſua baſe AD moltiplicata per la lunghezza AE.

Lo ſteſſo dicaſi di tutt' i priſmi inclinati.

557. COROLLARIO II. La medeſima difficoltà ha luogo ne' cilindri 'nclinati: ma tuttavolta egli pare, che ſi poſſano agevolmente miſurare in queſto modo. Sia 'l cilindro inclinato ABCD (*Fig. 367.*); lo ſego con un piano EB perpendicolare fra i lati AD,

AD, BC, e che paffi per l'eftremità B della bafe inferiore AB: concepifco, che'l cilindro fia prolungato dal lato di D, e'l fego mediante un'altro piano FC parallelo al piano EB, il che mi dà un cilindro retto EBCF uguale al cilindro inclinato ABDC; poichè, effendo la parte cilindrica ABE uguale alla parte cilindrica DCF, fe ad amendue le parti fi fomma la parte comune EBCD, s'avrà ABCD = EBCF; onde, moltiplicando la circonferenza della bafe EB del retto cilindro EBCF pel lato BC, il prodotto farà la fuperficie del cilindro retto EBCF, e in confeguenza dell' inclinato ABCD: ma la quiftione confifte in trovare il circuito della bafe EB, effendo quefta un'eliffe, come a fuo luogo vedremo, e non più un circolo come la bafe AB. Però la più fpedita è di mifurare con un filo il contorno della predetta bafe.

558. PROPOSIZIONE CXXI. *La fuperficie di qualfivoglia piramide retta, la cui bafe fia un poligono reg lare, equivale al perimetro della fua bafe moltiplicata per la metà d' una retta tirata dal vertice* E *perpendicolarmente ful lato, o fulla bafe d' una delle facce.*

Sia la piramide quadra e retta ABCD (*Fig.* 368.); la fua fuperficie è compofta di quattro triangoli fimili ed uguali; e per confeguente effa equivale a quattro volte il triangolo AEB: ora, detto triangolo è uguale alla fua bafe AB moltiplicata per la metà dell'altezza FE; dunque la fuperficie della piramide equivale a quattro volte la bafe AB, o al circuito ABCD moltiplicato per la metà di AE.

569. AVVERTIMENTO. Se fi tagliaffe la piramide con un piano MNOQ parallelo alla bafe e fegante i quattro limiti ciafcuno per mezzo, il perimetro MNOQ equivarrebbe alla metà del perimetro ABCD della bafe; imperocchè i triangoli fimili EAB, EMN ci danno EA. EM : : AB. MN : ma per la coftruzione abbiamo EM = $\frac{1}{2}$EA; dunque MN = $\frac{1}{2}$AB, e così dell'altre facce. Ora, ficcome'l prodotto del perimetro ABCD per la metà di EF è lo fteffo che'l prodotto della metà del perimetro ABCD per l'intera retta EF, ne fegue, che la fuperficie di qualfivoglia piramide retta e regolare equivale al prodotto del contorno medio, prefo in egual diftanza fra'l vertice e la bafe, moltiplicato per la retta EF.

570. COROLLARIO I°. *La fuperficie di qualunque cono retto* ABC (Fig. *369.*) *equivale al prodotto della circonferenza* AB *della*

della sua base moltiplicata per la metà del lato CB, *o alla circonferenza media* MN *moltiplicata pel lato* CB.

Imperocchè, qualunque cono regolar' è una piramide regolare d'infiniti lati, e la retta tirata dal vertice C sopra la base infinitamente picciola d'uno de'triangoli, che compongono le facce, non è differente dal lato CB. Dunque, ec.

571. COROLLARIO II. Per misurare le superficie delle piramidi rette non regolari, e delle piramidi inclinate, le cui basi sono regolari, od irregolari, conviene di necessità misurare a parte ciascuna faccia dei triangoli, poichè tutti non hanno la medesima altezza. E quindi deriva, che non s'è ancora trovato'l modo di misurare la superficie d'u cono inclinaro ABC (*Fig.* 370.). Certuni danno per regola u .noltiplicare la circonferenza della base AB per la metà del lato CD medio fra'l lato maggiore AC, e'l minore BC. Ma ciò non è stabilito sopra alcuna pruova Geometrica, e al più non può fare che un'approssimazione.

572. PROPOSIZIONE CXXII. *La superficie d'una piramide retta e regolare troncata parallela alla sua base equivale alla somma de' perimetri* ABCD, HGFE *delle sue basi* (Fig.371.), *moltiplicata per la metà della retta* RS *perpendicolare fra i due lati paralleli* AB, HG *dell'una delle sue facce* ABGH, *ovvero al perimetro* MNOQ, *che sega i limiti* AH, GB, *ec. ciascuno per mezzo, moltiplicato per la retta* RS.

Retta essendo e regolare la piramide, la sua superficie troncata è composta di tanti trapezoidi uguali, quanti sono i lati, di cui è composta la base: ora, il trapezoide ABGH equivale alla somma de'suoi due lati paralleli AB, HG moltiplicata per la metà della sua altezza RS, ovvero alla retta MN, che sega per mezzo i suoi due lati non paralleli, moltiplicata per l'altezza RS (*N.* 386.); onde la superficie della piramide troncata equivale a tante volte l'uno, o l'altro di questi prodotti, quanti sono i lati della base; cioè, in questa figura, a quattro volte l'uno, o l'altro prodotto: ma, i lati AB, HG presi quattro volte formano i due perimetri ABCD, HGFE, e la retta MN presa quattro volte forma 'l perimetro MNOQ. Dunque, ec.

573. COROLLARIO I°. *La superficie d'un cono retto, troncato parallelo alla sua base, equivale alle circonferenze delle sue due basi* AB, DC (Fig. 372.) *moltiplicate per la metà del lato* CB, *o alla circonferenza media* EF, *che sega per mezzo ciascuno de' lati* DA, CB, *moltiplicata pel lato* CB.

Ciò

Ciò è per se evidente, poichè un cono retto, segato parallelo alla sua base, è una piramide retta regolare d' infiniti lati segata parallela alla sua base.

574. COROLLARIO II. La superficie d'una piramide retta irregolare, segata parallela alla sua base, non può misurarsi che col prendere ciascuna faccia a parte; e lo stesso dicasi delle piramidi inclinate troncate, poichè le lor facce son sempre differenti.

575. PROPOSIZIONE CXXIII. *Se in un semicircolo* ACDF *iscrivesi un poligono regolare* ABCDEF (Fig. 373.), *di cui due de' suoi lati* AB, EF *terminino sopra l' estremità* A, F *del diametro* AF, *e che si faccia girar detto poligono intorno 'l diametro fisso* AF; *la superficie, che descriverassi da' lati* AB, BC, CD, ec. *di questo poligono, sarà uguale alla circonferenza avente per raggio l' apotema* OR *moltiplicata pel diametro* AF.

Egli è manifesto, che i lati AB, EF descriveran delle superficie di coni; ch' i lati BC, DE, che non sono paralleli all' asse, e che non lo toccano, descriveranno delle superficie di coni segati paralleli alle lor basi; e che se trovasi un lato CD, parallelo al diametro, esso descriverà uaa superficie del cilindro. Da ciascun' angolo tiro delle rette BH, CM, DT, EV perpendicolari al diametro; e se dimostro, che la superficie del cono, che descrive AB, equivaglia alla retta AH compresa fra 'l punto A, e la perpendicolare BH moltiplicata per la circonferenza, il cui raggio si è l' apotema OR; che la superficie segata, che descrive BC, sia uguale alla retta HM compresa fra le due perpendicolari BH, CM moltiplicata per la stessa circonferenza, e così di seguito; avrò altresì dimostrato, che la somma di tutte le superficie equivale alla somma delle parti AH, HM, MT, ec. del diametro AF, cioè ad AF moltiplicato per la circonferenza, il cui raggio sia l' apotema OR, e che conseguentemente la superficie totale descritta dai lati del poligono equivale alla superficie d' un cilindro, ch' abbia per base 'l circolo, il cui raggio sarebbe OR, e per altezza il diametro AF. Ma vegniamo alla dimostrazione.

La superficie del cono descritta dal lato AB è uguale alla circonferenza della sua base, o alla circonferenza, che dalla perpendicolare BH sarebbe descritta intorno 'l diametro AF, moltiplicata per la metà del lato AB (*N.* 570.); ovvero, segando AB per mezzo in R, la superficie del cono equivale alla circonferenza, che descriverebbesi dalla retta RS perpendicolare ad AF, moltiplicata pel lato AB: ora, perpendicolare essendo l' apotema OR ad AB,

AB, simili sono i triangoli rettangoli SOR, RAS, e a cagione delle parallele RS, BH, i triangoli rettangoli RAS, BAH son parimente simili; il triangolo SOR è dunque simile al triangolo BAH, e per conseguente BA. AH : : RO. RS; e'n vece degli ultimi due termini RO, RS, ponendo le circonferenze, di cui essi sarebbero i raggi, elle sono fra loro come i lor raggi; e chiamando le stesse (RO, (RS, avremo BA. AH : : (RO, (RS, e facendo 'l prodotto degli estremi e quello de' medj, avremo BA × (RS = (AH × RO, cioè la retta AH moltiplicata per la circonferenza dell'apotema RO uguale alla retta AB moltiplicata per la circonferenza del raggio RS, o alla superficie conica, che descriverebbe AB.

Per dimostrare lo stesso rispetto alle superficie del cono troncato, che si descriverebbero dalle rette BC, DE, ec. le quali non sono parallele al diametro AF, e ad esso non terminano, divido DE per mezzo in P, e tirando al centro la retta PO, ella è pure l'apotema del poligono; da E tiro EL parallela al diametro, e da P la retta PX perpendicolare allo stesso. Il triangolo rettangolo OPX è simile al triangolo *mPn*; *mPn* è simile al triangolo *n*PE, e questo al triangolo LED; dunque simili essendo i triangoli OPX, LDE, abbiamo DE. LE, o TV : : OP. PX; e'n vece di OP, PX ponendo le circonferenze, di cui elle sarebbon raggi, e che noi chiameremo (OP, (PX, s' avrà DE. TV : : OP. PX; dal che si deduce DE × (PX = TV × (OP. Ma DE × (PX è la superficie del cono troncato, che descriverebbe DE girando intorno AF (*N.* 573.); onde questa superficie è uguale alla parte TV del diametro moltiplicata per la circonferenza, il cui raggio sarebbe uguale all'apotema OP, od OR; e così dell'altre.

Quanto alla superficie, che descriverebbe il lato CD parallelo al diametro, egli è evidente, ch'essa equivarrebbe alla retta CD, od MT moltiplicata per la circonferenza, il cui raggio sarebbe l'apotema OZ, od OR. Dunque, ec.

576. COROLLARIO. Se dunque si fa un cilindro *abmn*, la cui base *ab* sia'l circolo, ch'abbia per raggio l'apotema RO, e la cui altezza *bm* sia uguale al diametro AF, la superficie di detto cilindro sarà uguale alla superficie, che descriverebbe il poligono ravvolgendosi intorno AF. In oltre, qualsivoglia superficie particolare descritta dall'uno de'lati, come BC, sarà uguale alla superficie della porzione del cilindro, che ha per altezza la parte HM

del diametro corrispondente al lato BC ; e così dell' altre .

577. PROPOSIZIONE CXXIV. *La superficie d' una sfera* ABCD (Fig. 374.) *equivale a quella del cilindro circonscritto* EFGH.

La sfera ABCD è descritta dalla rivoluzione del diametro DAB intorno 'l diametro BD : ora, potendo questo semicircolo esser considerato come un poligono d' infiniti lati , la superficie della sfera non differisce dalla somma delle superficie, ch' i lati infinitamente piccioli del poligono descrivono , girando intorno BD ; e siccome la somma di esse equivale alla circonferenza, che ha per raggio l' apotema del poligono, moltiplicata pel diametro BD (*N.* 575.), così ne segue, che la superficie della Sfera è uguale a questo prodotto: ma l' apotema d' un poligono d' infiniti lati non differisce dal raggio OA del semicircolo ; onde la superficie della Sfera è uguale alla circonferenza del raggio OA moltiplicata pel diametro BD ; e per conseguente essa equivale alla superficie del cilindro circonscritto EFGH.

578. COROLLARIO I°. *La superficie d' un segmento* MBN *di Sfera equivale alla superficie della porzione* TVGH *del cilindro circonscritto , che ha l' altezza* TH *uguale all' altezza* XB *del segmento*.

Imperocchè i lati infinitamente piccioli del poligono , compreso fra 'l punto B e la perpendicolare MX , descrivono delle superficie uguali a quelle delle porzioni cilindriche, che hanno per altezze le parti del diametro corrispondenti ad essi lati (*N.*575.) ; onde tutte queste superficie sono insieme uguali alla superficie cilindrica , che ha per altezza la parte BX del diametro corrispondente alla somma de' lati.

579. COROLLARIO II. *La superficie d' una zona* AMNC *equivale alla superficie* ACVT *della porzione cilindrica, che ha per altezza l'altezza* OX *della zona*.

Ciò provasi nella stessa maniera ; e così si discorra dell' altre parti della superficie della sfera.

580. COROLLARIO III. *La superficie d' una Sfera è quadrupla del suo massimo circolo* AC.

La superficie della Sfera è uguale a quella del cilindro circonscritto EFGH, e questa alla circonferenza EF, od AC del massimo circolo moltiplicata pel diametro: ora, il massimo circolo AC equivale alla sua circonferenza moltiplicata per la metà del raggio, o pel quarto del diametro (*N.* 378.) ; dunque la superficie della

la

la Sfera è al suo massimo circolo, come la circonferenza del massimo circolo moltiplicata per lo diametro è alla medesima circonferenza moltiplicata pel quarto del diametro, e conseguentemente come 'l diametro è al suo quarto, o come 4 ad 1.

581. AVVERTIMENTO. Una Sfera può considerarsi come composta d'infinite piramidi, le cui basi infinitamente picciole sieno sopra la superficie ed i vertici al centro della Sfera; dal che n'avviene, ch'avendo tutte queste piramidi la medesima altezza, cioè 'l raggio della Sfera, la loro somma sarà uguale alla somma delle lor basi, o alla superficie della Sfera moltiplicata per lo terzo del raggio. Ciò posto, egli è facile misurare qualsivoglia parte della Sfera.

Abbiasi p. e. a misurare il settore MBNO (*Fig.* 374.). Moltiplico la superficie MBN, ch'è la base di tutte le piramidi contenute da questo settore, pel terzo del raggio BO, e'l prodotto è la solidità ricercata.

Parimente, per misurare il segmento sferico MBN, misuro 'l settore, e da esso ne levo il cono MON.

Così ancora, per misurare la zona sferica AMNC, ne levo il cono MON, e'l residuo è la somma delle piramidi, ch' avrebbono i loro vertici in O, e le cui basi sarebbero sopra la superficie della zona; moltiplico adunque la superficie della zona pel terzo del raggio, e al prodotto aggiugno il cono MON, il che mi dà la solidità della zona; e così in altri casi simili.

582. PROPOSIZIONE CXXV. *La superficie d'un'ungula* ABCE (Fig. 375.) *è a quella della Sfera, che la sua base* ABC *descriverebbe girando intorno 'l diametro* AC, *come 'l altezza maggiore* EB *dell' ungula è alla circonferenza del massimo circolo della Sfera.*

Supponiamo, che l'ungula sia uguale alla Sfera; l'altezza maggiore EB equivarrà dunque alla circonferenza del massimo circolo (*N.* 518.). Ora, la superficie di quest' ungula è composta d' infinite rette alzate perpendicolarmente sopra tutt' i punti della circonferenza ABC della base, ed uguali ciascuna a ciascuna alle circonferenze, che tutt'i punti di ABC descriverebbero rivolgendosi intorno AC; imperocchè, dovunque vorrassi segar l'ungula con un piano HPL parallelo al triangolo maggiore EBO, s'avrà HP. PL : : EB. BO: ma EB è la circonferenza del raggio BO; onde HP sarà altresì la circonferenza del raggio PL; e così in altri casi. Ora, tutte le circonferenze descritte da qualunque punto della circonferenza CBA, che rivolgerebbesi 'ntorno CA formano la

superficie della Sfera; dunque la superficie dell' ungula equivale a quella della Sfera.

Che se l'ungula è minore, o maggior della Sfera, l'altezza maggior' EB sarà pure maggiore, o minor della circonferenza del massimo circolo, e per conseguente HP sarà eziandio maggiore, o minor della circonferenza del raggio PL, e così dell' altre; dal che ne segue, che la superficie dell' ungula sarà minore, o maggior della superficie della Sfera, a misura ch' EB sarà minore, o maggior della circonferenza del massimo circolo, e che conseguentemente la superficie dell' ungula sarà a quella della Sfera, come l' altezza EB alla circonferenza del massimo circolo.

583. COROLLARIO I°. *Se per un piano* HPL *parallelo al suo triangolo maggiore si sega un' ungula della prima spezie, la superficie della porzione* HPLC, *segata da detto piano, è alla superficie, che dalla sua base* PCL *verrebbe descritta, girando intorno 'l diametro, come l'altezza* EB *dell' ungula è alla circonferenza del massimo circolo.*

Ciò risulta ad evidenza dalla presente Proposizione.

584. COROLLARIO II. *La superficie d' un' ungula della prima spezie* ABCD *equivale ad un rettangolo, che abbia per base il diametro* AC, *e per altezza una retta uguale all' altezza maggiore* EB *dell' ungula.*

Se l' ungula equivale alla sfera, la sua superficie è parimente uguale a quella della Sfera: ora, la superficie della Sfera equivale a quella del cilindro circonscritto, e questa alla circonferenza del massimo circolo moltiplicata pel diametro CA; se dunque si piglia una retta CT uguale alla circonferenza del massimo circolo, ovvero all' altezza EB dell' ungula, il rettangolo fatto sotto CT e 'l diametro AC sarà uguale alla superficie del cilindro, della Sfera, o dell' ungula.

Che se l' ungula è minore, o maggior della Sfera, la sua superficie sarà a quella della Sfera, o al rettangolo AT, come l' altezza EB alla circonferenza del massimo circolo, o alla retta CT; onde prendendo una linea minore, o maggior di CT, e con essa insieme col diametro AC formando un rettangolo AX, egli sarà uguale alla superficie dell' ungula; poichè 'l rettangolo AX sarà al rettangolo AT, come l' altezza BE alla circonferenza del massimo circolo uguale a CT.

585. COROLLARIO III. *La superficie dell' ungule della seconda spezie sarà facile a ritrovarsi, quando si ponga attenzione a quello che s' è detto circa la loro solidità.* Per

Per ritrovare e. g. la superficie dell' ungula ADCB (*Fig.* 344.) della seconda spezie, che fa parte dell' ungula SXTB della prima, scorgo, che dalla superficie dell'ungula SXTC sottrar debbo 1°. la superficie della spezie di prisma triangolare QSACZT, 2°. la superficie della porzione cilindrica QXZCAD.

Ora supponendo, che l'ungula equivaglia alla Sfera, che descritta sarebbe dalla sua base; la sua superficie sarà uguale a quella di detta Sfera, e la superficie della spezie di prisma QSACZT sarà uguale a quella de'due segmenti sferici QS*z*, ZT*y*; finalmente, la superficie della porzione cilindrica QXZCAD equivale alla circonferenza QXZ moltiplicata per l'altezza XD. Ma tutto ciò è facile a conoscersi; ond'egli è altresì facile di conoscere la superficie dell' ungula DACB.

Che se l'ungula SXTB non è uguale alla Sfera, la sua superficie sarà sempre a quella della Sfera, come l' altezza BX alla circonferenza del massimo circolo; e la superficie della spezie di prisma QSACTZ sarà altresì a quella de'due segmenti sferici QS*z*, ZT*y*, come l'altezza BX è alla circonferenza del massimo circolo: così la superficie dell'ungula ADCB sarà facile a conoscersi.

Egli è parimente agevol cosa a conoscere la superficie dell' ungula ADCB (*Fig.* 345.), la cui base è maggior d'un semicircolo, ponendo attenzione a quanto s'è detto circa la sua solidità.

586. AVVERTIMENTO. Se faremo attenzione alle cose dette circa la solidità degli anelli aperti, o chiusi, troverem 1°. che la superficie d'un'anello chiuso (*Fig.* 348.) formato dalla rivoluzione d'un circolo ABCD, che gira intorno una tangente fissa HP, equivale alla superficie d'un cilindro AMTC (*Fig.* 350.), ch'abbia per base il circolo genitore dell'anello, e per altezza DS la circonferenza di detto circolo. 2°. Che la superficie della parte esteriore dell' anello chiuso equivale a quella del semicilindro DABMNS (*Fig.* 350.), più la superficie dell'ungula SMNR uguale a quella della Sfera, ch'abbia per massimo circolo il genitore. 3°. Che la superficie della parte interiore del medesimo anello equivale a quella del semicilindro DCBNTS, meno la superficie dell'ungula NTSC uguale all' ungula SMNR. 4°. finalmente, che la superficie del voto BRCSD (*Fig.* 348.) è la stessa di quella della parte interiore dell'anello, e che per conseguenza la sua metà è uguale alla superficie del cono DCS, che ha per lato il quarto di circonferenza DC del circolo genitore.

Si troverà eziandio 1°. Che la superficie d'un anello aperto

to

to (*Fig.* 352.) fatto dalla rivoluzione d'un circolo ABCD, che gira intorno ad una linea efterior' immobile HP, equivale alla fuperficie d'un cilindro ACEM (*Fig.* 354.), che ha per bafe il circolo genitore, e per altezza la retta XQ uguale alla circonferenza, che dal centro X del circolo genitore viene defcritta intorno HP. 2°. Che la fuperficie della parte efteriore del medefimo anello è uguale alla fuperficie del femicilindro DABNS, più quella d' un ungula SMNR uguale ad una Sfera, ch' abbia per maffimo circolo il genitore. 3°. Che la fuperficie della parte interior' equivale alla fuperficie del femicilindro DCBNES, meno la fuperficie dell' ungula NESL uguale all' ungula SNMR. 4°. Finalmente, che la fuperficie del voto BCDSQR (*Fig.* 352.) equivale alla fuperficie della parte interior dell' anello, e ch' in confeguenza la metà di detta fuperficie è uguale a quella d' un cono troncato CDSQ, ch' abbia per limite il quarto CD della circonferenza del circolo genitore.

587. PROBLEMA. *Trovar la fuperficie d' una piramide* ABCDE (Fig. 351.), *i cui limiti fono de' quarti di circoli conveffi dalla banda dell' affe.*

Alla bafe io circonfcrivo una circonferenza di circolo ABCD, e concepifco un cono, ch' abbia detto circolo per bafe, e 'l limite AE per lato. Altro non farà la fuperficie di quefto cono che la fomma delle circonferenze, che da tutt' i punti del quarto di circolo AE fi defcriverebbero girando intorno l' affe EO, ficcome altro non è la fuperficie della piramide ch' una fomma di perimetri, qual' è FGHL, fimili al perimetro della bafe ABCD, ed ifcritti fimilmente nelle circonferenze corrifpondenti : ma ogni circuito FGHL è alla circonferenza corrifpondente, come 'l perimetro ABCD della bafe della piramide alla circonferenza ABCD della bafe del cono. Però debbo dire: come la circonferenza ABCD della bafe del cono è al perimetro ABCD della bafe della piramide, così la fomma delle circonferenze componenti la fuperficie, cioè la fuperficie del cono è alla fomma de' circuiti componenti la fuperficie della piramide, o alla fuperficie della fteffa piramide. Ora, la circonferenza ABCD e 'l perimetro ABCD mi fon noti, ficcome me lo è ancora per lo precedente Avvertimento la fuperficie del cono; onde agevol fia conofcere la fuperficie della piramide.

588. AVVERTIMENTO. Così pure fi conofcerà la fuperficie della piramide troncata (*Fig.* 355.), i cui limiti FA, QB, ec. fono quarti di circolo conveffi verfo l' affe.

Quanto

Quanto sia alla berretta (*Fig.356.*) , che può esser considerata come una piramide, i cui limiti EA, EB sono quarti di circoli concavi verso l'asse, egli è manifesto, che girar facendo 'l quarto di circolo EOA intorno EO, descriverebbe una semisfera, in cui iscritta sarebbe la berretta. Ora, la superficie di questa semisfera altro non sarebbe se non se la somma delle circonferenze, che da tutt'i punti di EA si descriverebbono intorno EO, siccome altro non sarebbe la superficie della berretta ch'una somma di perimetri, qual'è LFGH, simili al perimetro ABCD della base, ed iscritti similmente nelle circonferenze corrispondenti. Ond'egli si dirà: come la circonferenza della base della semisfera è al perimetro ABCD della base della berretta, così la superficie della semisfera è ad un quarto termine, che sarà la superficie della berretta.

Di alcuni usi del Compasso di Proporzione necessario per l'intelligenza di quanto s'è detto nel corso del presente Libro.

589. Ognun sà, che 'l Compasso di proporzione è composto di due lamine di rame, o d'argento, che girano intorno ad una commessura, la qual'è alla loro estremità; e che dal centro di detta commessura sono d'ambe le parti tirate delle linee sopra le due lamine, le quali han diversi nomi. Io quì non pretendo di spiegare tutti gli usi di queste differenti linee, giacchè ciò fu fatto da M^r. *Ozanam* in un breve Trattato, che ha per titolo: *Uso del Compasso di Proporzione*; e quindi non parlerò che del modo di trovare due medie proporzionali fra due date linee, e di quello d'iscrivere in un circolo un poligono, il quale non abbia più di dodici lati.

La linea *delle parti uguali* è così chiamata, perch'è divisa in un certo numero di particelle uguali, e può in conseguenza servire anche di scala.

La linea dei solidi è stata formata in questo modo. Fatti 64 solidi simili, o 64 cubi, i quali sieno tra loro come i numeri naturali 1. 2. 3. 4. 5. ec. fino 'l 64, si sono trasportati i lati di detti cubi sopra la linea de' solidi dall'una e dall'altra parte, cominciando sempre dal centro della commessura; talchè prendendo p. e. la lunghezza dal centro della commessura fino al numero 15, e la lunghezza dalla commesura fino al numero 20 segnato, queste due lunghezze dinotano i lati di due solidi simili, o di due cubi, i quali sarebbero fra loro come 15 a 20.

La linea de' poligoni è stata così formata. Descritto un circolo, in

in cui si sono iscritti li poligoni regolari dal triangolo fino al dodecagono, si sono trasportati i lati di detti poligoni sopra la linea de' poligoni, cominciando sempre dal centro della commessura; tal che la lunghezza presa p. e. dal centro fino 'l numero segnato 5, e la lunghezza presa dal centro fino 'l numero segnato 7 esprimono i lati del pentagono e dell' ettagono iscritti nello stesso circolo: ciò posto.

590. PROBLEMA. *Trovar due medie proporzionali fra due date linee* a, b (Fig. 376.).

Col compasso ordinario prendo la grandezza della linea *a*, e la porto sopra l'una delle linee delle parti uguali, ponendo l'una delle punte sul centro della commessura, e lasciando cader l'altra sopra detta linea, per sapere quante parti uguali contiene la linea *a*. Lo stesso io faccio rispetto alla linea *b*; e trovando p. e. che la linea *a* contiene 30 parti uguali, e che la linea *b* ne contiene 17, veggo, che queste due linee sono fra loro, come 30 a 17. Piglio altresì col compasso ordinario la grandezza della linea *a*, ed apro 'l compasso di proporzione, rappresentato quì dall' angolo BAC, finchè posta l'una delle punte del Compasso ordinario sull' uno de' punti 30 della linea de' solidi, l'altra punta cada sopra l' altro punto 30; ciò fatto, e 'l Compasso di proporzione rimanendo così aperto, prendo la distanza de' punti 17, 17 della linea de' solidi, e questa distanza è la prima delle due medie proporzionali *m*, *n* ricercate. Ora, ritrovata questa, non si fa che prendere una media proporzionale *n* tra *m* e *b*, ed hassi la seconda.

Per comprenderne la ragione si rifletta, ch' essendo le quattro linee *a*, *m*, *n*, *b* in proporzione continua, aver deesi $a^3 . m^3 : : a . b : : 30 . 17$; così le linee *a*, *m* esser debbono fra loro come i lati di due cubi, o di due solidi simili, che fra loro sarebbero come 30 a 17. Ora, le linee *a*, *m* sono, per la costruzione, uguali alle distanze 30, 30, e 17, 17, e a motivo de' triangoli simili 30 A 30, e 17 A 17, abbiamo 30, 30 . 17, 17 : : 30, A . 17, A; dunque *a*. *m* : : 30, A. 17, A: ma 30, A. e 17, A sono i lati di due solidi simili, ovvero di due cubi, che sono fra loro come 30 a 17; onde i cubi di *a*, *m* son parimente come 30 a 17, ed in conseguenza *m* è la prima delle due medie proporzionali ricercate.

591. PROBLEMA. *Dato un circolo* ABCD (Fig. 377.) *trovar' il lato d' un poligono regolare, che li si vuole iscrivere.*

Col compasso ordinario prendo la grandezza OH del raggio del dato

dato circolo; apro 'l compasso di proporzione, finchè posta la punta del compasso ordinario sull'uno de' punti 6 della linea de' poligoni, l'altra punta cada sopra l'altro punto 6; ciò fatto, e rimanendo il compasso di proporzione così aperto, se cercasi 'l lato del pentagono, ch'iscriver deesi nel dato circolo, col compasso ordinario piglio la distanza 5, 5 de' punti 5, 5 della linea de' poligoni, e questa distanza è'l lato, che si cerca, AB; poichè, per la costruzione, il raggio OH e la linea AB sono fra loro come le distanze 6, 6, e 5, 5: ma a motivo de' triangoli simili 6R6, 5R5 abbiamo 6, 6. 5, 5 :: 6R. 6R; dunque OH. AB :: 6R. 5R, cioè 'l raggio OH del dato circolo è alla corda AB, come 'l lato 6R dell' esagono iscritto nel circolo, che ha servito alla divisione della linea de' poligoni, è al lato 5R del pentagono iscritto nello stesso circolo: ora, il lato 6R dell' esagono è uguale al raggio del circolo, in cui 'l medesimo esagono è iscritto; però noi abbiamo: il raggio OH del dato circolo è alla sua corda AB, come 'l raggio del circolo, che ha servito per la costruzione della linea de' poligoni, è alla corda R5 di detto circolo: ma la corda R5 è 'l lato del pentagono iscritto nel circolo, che ha servito a costruire la linea de' poligoni; onde AB esser dee il lato del pentagono iscritto nel dato circolo.

592. AVVERTIMENTO. Quello ch'io ho detto in questo Capitolo circa i Solidi e le loro superficie fa bastevolmente scorgere, ch'io potrei molte cose soggiugnere alle già dette: ma siccome i metodi particolari, li quali converrebbe usare, sarebbono troppo lunghi ed imbrogliati, così io penso di riserbare tal materia al seguente Libro, ove ne darò alcuni di generali e facili onde ritrovare la solidità e superficie d'infiniti solidi.

CAPITOLO UNDECIMO.

Della Musura delle Muraglie, e de' Legni.

593. LA misura, ch'è in uso per misurare le lunghezze, è una lunghezza detta *Pertica*, o *Pertica corrente*, la quale dividesi in sei parti uguali nomate *Piedi*: ciascun piede si suddivide in 12 parti uguali chiamate *Pollici*: ciascun pollice in 12 parti uguali, che si chiamano *Linee*; ed ogni linea in 12 parti uguali dette

Punti, i quali sono grandezze oltre modo picciole, che per lo più nella pratica si trascurano.

Così, contenendo la pertica corrente 6 piedi, ed ogni piede 12 pollici, egli è manifesto, che ciascuna pertica corrente contiene 6 volte 12, o 72 pollici, e che qualunque pollice contiene 12 linee; la pertica corrente dee dunque contenere 72 volte 12, ovvero 864 linee.

594. La pertica quadrata è un quadro ABCD (*Fig.* 378.), di cui la base AB e'l altezza AD vagliono ciascuna una pertica. Ora, siccome ciascun lato contiene 6 piedi, è evidente, che moltiplicando l'uno per l'altro, il prodotto 36 denota, che la pertica quadra contiene 36 piedi quadri, o 36 piccioli quadrati, i quali hanno un piè di base, ed uno d'altezza, come apparisce dalla figura; così ancora; avendo ogni piede 12 pollici di base e 12 d'altezza, ei contiene 12 volte 12, o 144 pollici quadrati, e per conseguenza la pertica quadra contener dee 36 volte 144, o 5184 pollici quadri; finalmente, avendo ogni pollice quadrato 12 linee di base e 12 d'altezza, egli contiene 12 volte 12, o 144 linee quadre: dal che n'avviene, che la pertica quadrata contiene 5184 volte 144, o 746496 linee quadre.

La pertica quadrata serve per misurare le superficie; poichè, se una superficie ha 3 pertiche di lunghezza e 2 di larghezza, moltiplicando l'una per l'altra, s'avranno 6 pertiche quadrate; cioè detta superficie conterrà 6 volte un quadro, la cui base e'l altezza sono ciascuna una pertica corrente.

595. La pertica cuba è un cubo AB (*Fig.* 379.), le cui dimensioni AC, AD della base ed altezza AE vagliono ciascuna una pertica corrente. Ora la base di questo cubo, essendo una pertica quadra, contiene 36 piè quadri, i quali moltiplicati per l'altezza AE, che vale 6 piedi, ci danno 216 piedi cubi pel valore della pertica cuba; così la pertica cuba contiene 216 piccioli cubi, come scorgesi dalla figura, le cui tre dimensioni hanno ciascuna un piede di lunghezza: parimente le due dimensioni della base di cadaun piede, essendo ciascuna di 12 pollici, producono 144 pollici quadri per base, i quali moltiplicati per l'altezza 1 piede, o 12 pollici ci danno 1728 pollici cubi pel valore del piede cubo; dal che ne segue, che la pertica cuba contiene 216 volte 1728, o 373248 pollici cubi: alla fine le dimensioni della base d'un pollice cubo, essendo ciascuna di 12 linee di lunghezza, danno di prodotto 144 linee quadre, le quali moltiplicate per l'altezza

tezza 12 ci danno 1728 linee cube pel valore d'un pollice cubo. Però la pertica cuba contiene 373248 volte 1728, ovvero 644972544 linee.

La pertica cuba serve a misurare i solidi; poichè, se le due dimensioni della base d'un solido sono 4, 3, e l'altezza del solido 5, la base sarà 4 volte 3, o 12 pertiche quadre, le quali moltiplicate per le 5 dell'altezza ci daranno 60 pertiche cube.

596. Troppo imbrogliata riuscendo pel calcolo la divisione della pertica quadra in piedi, pollici e linee quadrate, non meno che quella della cuba in piedi, pollici e linee cube, s'è trovato maniera di fare, che le divisioni di queste due sorte di pertiche sieno le stesse che quelle della pertica corrente; il che di gran lunga facilita 'l Calcolo. Ed ecco come s'ha fatto.

597. Sia la pertica quadra AC (*Fig.* 380.) : divido 'l lato AB in 6 parti uguali, ciascuna di cui vale per conseguenza un piede, e da' punti di divisione tiro delle parallele all'altro lato BC; il che divide la pertica in 6 rettangoli uguali, che appellansi *piè di pertica quadrata*, poichè ognuno ha un piede d'altezza, ed una pertica di base: divido pure l'altezza d'ogni piede di pertica quadra in 12 parti uguali, perocchè ciascun piede contiene 12 pollici; e da' punti di divisione tirando delle parallele alla base, ciascun piede di pertica quadrata trovasi diviso in 12 rettangoli, i quali diconsi *pollici di pertica quadrata*, perchè hanno un pollice d'altezza, ed una pertica di base: alla fine, dividendo l'altezza di ciascun pollice di pertica quadra in 12 parti uguali, e da' punti di divisione tirando delle parallele alla base, cadaun pollice di pertica quadra è diviso in 12 rettangoletti, i quali, perchè hanno una linea d'altezza, ed una pertica di base, chiamansi *linee di pertica quadra*. Talchè la pertica quadrata contiene 6 piedi, o 72 pollici, o finalmente 864 linee di pertica quadrata; e questa maniera di dividere la pertica quadra conviene benissimo non solo al Calcolo, ma eziandio alla natura delle cose; essendo manifesto, che se si moltiplica p. e. una pertica per un piede, il prodotto non è nè un piede, nè una pertica, ma una pertica di base, e un piede d'altezza; e così in altri casi.

598. Sia parimente la pertica cuba BE (*Fig.* 381.): divido la sua altezza AB in 6 parti uguali, e pe' punti di divisione faccio passare de' piani paralleli alla base; ciò che divide la pertica cuba in 6 parallelepipedi uguali, nomati *piedi di pertica cuba*, perchè ognuno d'essi ha un piede d'altezza, ed una pertica quadrata di

base: divido altresì l' altezza di cadaun piede di pertica cuba in dodici parti uguali; e pe' punti di divisione facendo passare de' piani paralleli alla base, ciascun piede di pertica cuba è diviso in 12 parallelepipedi, detti *pollici di pertiche cube*, poichè hanno un pollice d' altezza, ed una pertica quadrata di base: alla fine, dividendo l' altezza di cadaun pollice di pertica cuba in 12 parti uguali, e pe' punti di divisione facendo passare de' piani paralleli alla base, ciascun pollice di pertica cuba è diviso in 12 parallelepipedi uguali, detti *linee di pertica cuba*, perchè hanno una linea d' altezza, ed una pertica quadrata di base; tal che la pertica cuba contiene 6 piedi, o 72 pollici, o finalmente 864 linee di pertica cuba.

Vedremo ne' susseguenti Esempj in qual maniera le sopr' accennate divisioni servano pel calcolo.

599. ESEMPIO I°. *Quante pertiche quadrate contiene una Muraglia di 23 pertiche, 3 piedi, 6 pollici, 6 linee di lungbezza, e 2 pertiche, 3 piedi, 6 pollici, 9 linee d' altezza?*

Scrivo 'l numero da moltiplicarsi e 'l moltiplicatore al solito, cioè le pertiche sotto le pertiche, i piedi sotto i piedi, ec. e siccome 'l numero 2 delle pertiche del moltiplicatore ha un sol carattere, così io moltiplico le pertiche, i piedi, i pollici e le linee del numero da moltiplicarsi per 2, dicendo: 2 volte 6 linee fan 12 linee di pertica quadra, od un pollice; scrivo zero sotto le linee, e ritengo 1: 2 volte 6 pollici fan 12, più 1, che ritengo, = 13, ovvero un piede di pertica quadra ed un pollice; scrivo un pollice, e ritengo 1: 2 volte 3 piedi fanno 6, più 1, ch' io ritengo, = 7, od una pertica quadrata ed un piede, ch' io scrivo ritenendo una pertica; e terminando il rimanente sempre con lo stesso metodo, ho 47 pertiche, 1 piede, 1 pollice, o linee per lo prodotto di 2 pertiche.

23 *pert.*	3 *pied.*	6 *pol.*	6 *lin.*	
2	3	6	9	
47	1	1	0	
11	4	9	3	
1	5	9	6	$\frac{1}{2} = \frac{8}{16}$
	1	5	8	$\frac{5}{16} = \frac{5}{16}$
61 *pert.*	1 *pied.*	1 *pol.*	5 *lin.*	$\frac{13}{16}$

A fine di moltiplicare per 3 piedi, io dico: Se dovessi moltiplicare per una pertica, il prodotto sarebbe 23 pertiche quadrate, 3 piedi, 6 pollici e 6 linee di pertica quadra; dunque tre piedi, i quali altro non sono che la metà d' una pertica, ci debbon dare la metà di questo prodotto, cioè 11 pertiche, 4 piedi, 9 pollici

lici e 3 linee. Poi paſſando a' pollici dico: ſei pollici ſono 'l ſeſto di tre piedi, o 36 pollici: ora, tre piedi hanno prodotto 11 pertiche, 4 piedi, 9 pollici, 3 linee; onde 6 pollici non debbono produrre che 'l ſeſto di queſto prodotto, cioè 1 pertica, 5 piedi 9 pollici, 6 linee $\frac{1}{2}$.

Finalmente, 9 linee ſono l' ottavo di 6 pollici, o 72 linee; però 9 linee debbono dar di prodotto l'ottava parte di ciò, che han prodotto 6 pollici: così, prendendo l' ottavo di 1 pertica, 5 piedi, 9 pollici, 6 linee $\frac{1}{2}$, ho 1 piede, 5 pollici, 8 linee $\frac{3}{16}$.

Faccio la ſomma di tutt'i prodotti ritrovati, e 'l prodotto totale 61 pertic. 1 pied. 1 poll. 5 lin. $\frac{13}{16}$ è la ſuperficie della muraglia propoſta.

600. ESEMPIO II. *Trovare il contenuto d' una ſuperficie piana, la quale abbia* 34 *pertiche*, 2 *piedi*, 9 *pollici*, 8 *linee di larghezza*, *e* 23 *pertiche*, 4 *piedi*, 6 *pollici*, 8 *linee d' altezza*.

Traſcuro li 2 piedi, 9 pollici, 8 linee della larghezza, per evitare l'intrigo di moltiplicarli per le 23 pertiche dell'altezza. Moltiplicando dunque 34 × 23, ho i due prodotti 102 e 68, collocati come quì ſi vede.

34 *pert.*	2 *pied.*	9 *pol.*	8 *lin.*	
23	4	6	8	
102				
68				
11	2			
11	2			
2	5			
0	1	10	8	
7	5	6	2	$\frac{2}{3}$
1	5	10	6	$\frac{2}{3}$
0	5	11	3	$\frac{1}{3}$
0	0	11	10	$\frac{10}{18} = \frac{5}{9}$
0	0	3	11	$\frac{14}{27}$
818 *pert.*	5 *pied.*	6 *pol.*	8 *lin.*	$\frac{20}{27}$

Quattro piedi ſono i due terzi d'una pertica. Ora, ſe ſi moltiplica 34 per una pertica, il prodotto ſarà 34; onde moltiplicando per 4 piedi, il prodotto eſſer dee li due terzi di 34: ma il terzo di 34 è 11 pertiche, 2 piedi; però io ſcrivo due vlote queſto prodotto 11 pertiche, 2 piedi.

Sei pollici ſono 'l quarto di 2 piedi, o 24 pollici; onde pigliando 'l quarto di ciò che hanno prodotto due piedi, cioè di 11 pertiche, 2 piedi, ſi ha 2 pertiche, 5 piedi.

Otto linee ſono la nona parte di 6 pollici, o 72 linee; però,

pi-

pigliando 'l nono del prodotto di 6 pollici, cioè di 2 pertiche, 5 piedi, ho 0 pertiche, 1 piede, 10 pollici, 8 linee.

Ora tornando ai 2 piedi, 9 pollici, 8 linee, ch'io avea prima trascurato, dico: se dovessi moltiplicare 1 pertica per 23 pertiche, 4 piedi, 6 pollici, 8 linee, il prodotto sarebbe 23 pertiche, 4 piedi, 6 pollici, 8 linee: ma non dovendo moltiplicare che per 2 piedi, i quali sono 'l terzo d'una pertica, debbo avere solo il terzo di esso prodotto, cioè 7 pertiche, 5 piedi, 6 pollici, 2 linee $\frac{2}{3}$.

Nove pollici non sono esattamente contenuti in due piedi; però io divido 9 in due parti 6 e 3, di cui l'una 6 è 'l quarto di due piedi, o 24 pollici, e l'altra 3 è la metà di 6. Ora, perchè 6 pollici sono 'l quarto di 2 piedi, prendendo 'l quarto del prodotto di 2 piedi, cioè di 7 pertiche, 5 piedi, 6 pollici, 2 linee $\frac{2}{3}$, ho una pertica, 5 piedi, 10 pollici, 6 linee $\frac{2}{3}$. Per 3 pollici, piglio la metà di quest'ultimo prodotto, ed ho 5 piedi, 11 pollici, 3 linee $\frac{1}{3}$.

Otto linee non sono esattamente contenute in 3 pollici, o 36 linee; però io divido 8 in due parti 6 e 2, di cui la prima 6 è 'l sesto di 3 pollici, e l'altra 2 è 'l terzo di 6. Così, prendendo 'l sesto per lo prodotto di 3 pollici, ho 11 pollici, 10 linee $\frac{4}{9}$, e prendendo 'l terzo di quest'ultimo prodotto, ho 3 piedi, 11 linee $\frac{14}{27}$.

Finalmente sommando tutt'i prodotti, il prodotto totale 818 pertiche, 5 piedi, 6 pollici, 6 linee $\frac{20}{27}$ è 'l contenuto della superficie proposta.

*6*01. Per facilitare il calcolo, è talvolta necessario far delle false supposizioni, come si vedrà nell'Esempio che segue.

*6*02. ESEMPIO III. *Trovar'il valore d'una superficie, ch'abbia 32 pertiche di larghezza, e 25 pertiche, 9 pollici d'altezza.*

Moltiplico prima 32 × 25, il che mi dà i due prodotti 160 e 64, disposti come nella presente Tavola si può vedere.

32 *pert.*		
25 *pert.*	0 *pied.*	9 *pol.*
160 *pert.*		
64		
5	2 *pied.*	
2	4	
1	2	
804 *pert.*	0 *pied.*	

Ora, perch'egli sarebbe troppo imbroglio l'andar cercando cosa 9 pollici sieno rispetto ad una pertica, suppongo di dover moltiplicare 32 pertiche per un piede, ch'è il sesto d'una pertica; e dico: se dovessi moltiplicare per una pertica, il prodotto sareb-

be

be 32 pertiche; dunque moltiplicando per un piede aver debbo il sesto di 32, cioè 5 pertiche, 2 piedi, ch' io scrivo con animo di poscia cancellare, perchè nel numero da moltiplicarsi non v' entran piedi.

Nove pollici non sono esattamente contenuti in un piede, o 12 pollici; però io divido 9 in 2 parti 6 e 3, di cui la prima 6 è la metà d' un piede, e l' altra 3 è la metà di 6: quindi per 6 pollici io piglio la metà di 5 pertiche, 2 piedi, il che mi dà 2 pertiche, 4 piedi; e per 3 pollici piglio la metà di 2 pertiche, 4 piedi, il che mi dà 1 pertica, 2 piedi. Cancello il prodotto 5 pertiche, 2 piedi, che mi risulta da una falsa supposizione, e facendo la somma degli altri, ho 804 pertiche pel valore della superficie proposta.

603. AVVERTIMENTO. E' degno d'osservarsi, che se si cercasse d'estrarre la radice quadra da un prodotto, o da una superficie piana composta di pertiche quadrate, di piedi, pollici e linee di pertica quadra, egli non basterebbe ridurre 'l tutto in linee di pertica quadra, ma in altre converrebbe ridur dette linee in linee quadrate, cioè moltiplicare le linee di pertica quadra pel numero delle linee quadrate, ch' esse contengono.

Sia 'l prodotto 6 pertiche, 4 piedi, 0 pollici, 6 linee di pertica quadrata, di cui estrar si voglia la radice quadra. Per ciò fare riduco 'l tutto in linee, il che mi dà 5766 linee di pertica quadra. Ora, siccome ciascuna di dette linee è 'l prodotto d' una pertica di lunghezza per una linea d' altezza, e contenendo una pertica 864 linee, ne segue, che ciascuna linea di pertica quadrata contiene 864 linee quadre; onde, moltiplicando 5766 × 864, il prodotto è 4981824 linee quadrate, la cui radice è 2232 linee, le quali fanno 2 pertiche, 3 piedi, 6 pollici; ed in fatti, se si moltiplicano 2 pertiche, 3 piedi, 6 pollici per 2 pertiche, 3 piedi, 0 pollici, il prodotto sarà 6 pertiche, 4 piedi, 0 pollici, 6 linee, appunto secondo la proposta fatta. Ed eccone la ragione: essendo le linee di pertica quadra composte di due quantità di differenti spezie, cioè d' una pertica di lunghezza e d' una linea d'altezza, l'estrazione della lor radice non può dare nè linee, nè pertiche; e per conseguenza, se si vuole estrarne la radice, conviene di necessità ridur le linee di pertica quadrata in linee quadre, la cui altezza e lunghezza sieno della medesima spezie.

La stessa osservazione serva anche per i piedi di pertica quadra.

604. ESEMPIO IV. *Trovare il contenuto d' un solido, ch' abbia*

12 pertiche, 3 piedi, 4 pollici di lunghezza, 6 pertiche, 2 piedi 6 pollici di larghezza, e 13 pertiche, 4 piedi d'altezza.

Moltiplico la lunghezza per la larghezza, ed ho di prodotto 80 pertiche quadre, 3 piedi, 9 pollici, 11 linee di pertica quadrata, ed $\frac{1}{3}$ di linea.

12 *pert.*	3 *pied.*	4 *pol.*		
6	2	6	6 *lin.*	
75	2	0		
4	1	1	4	
1	0	3	4	
0	0	6	3	$\frac{1}{3}$
80 *pert.*	3 *pied.*	9 *pol.*	11 *lin.*	$\frac{1}{3}$
13	4			
240				
80				
26	4			
26	4			
6	5			
1	4	3		
0	[illegible]	[illegible]	8	
0	0	6	10	
0	0	3	5	
0	0	2	3	$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$
0	0	0	4	$\frac{10}{18} = \frac{5}{9}$
1102 *pert.*	0 *pied.*	0 *pol.*	11 *lin.*	$\frac{8}{9}$

Moltiplico questo prodotto per l'altezza 13 pertiche, 4 piedi, ed ho 102 pertiche cube, 0 piedi, 3 pollici, 11 linee di pertica cuba ed $\frac{1}{6}$ di linea per la olidità ricercata.

605. Conviene in oltre avvertire, che se si cercasse d'estrar la radice cuba da un prodotto composto di pertiche cube, di piedi, pollici e linee di pertica cuba, dovrebbesi non solo ridurre il tutto in linee di pertica cuba, ma eziandio moltiplicare queste linee pel numero delle linee cube, ch'esse contengono, ovvero per *746496*; poichè, avendo la linea cuba per base una pertica quadrata del valore di *746496* linee quadre (*N. 594.*), e per altezza una linea, vale conseguentemente *746496* linee cube. Dopo di che s'estrarrebbe la radice cuba col solito metodo.

Che se oltre le linee di pertica cuba si trovasse una frazione di linea, p. e. $\frac{1}{6}$, piglierebbesi'l sesto di *746496* linee quadre, ch'è il valore d'una linea di pertica cuba, e lo s'aggiugnerebbe alle linee cube, che s'avrebbero trovate facendo la riduzione; e se nel fare questa somma si trovasse una frazione di linea cuba, ridurrebbesi'l tutto in questa stessa frazione, ec.

Della

Della Misura de' Legni da Fabbrica, da Lavoro, ec.

606. Il legno o si considera colla sua scorza, o scorzato coll'asce e squadrato in forma di parallelepipedo assai diffettoso, o finalmente squadrato con la sega. Ogni legno, che sia squadrato coll'asce, o con la sega, essendo fatto in forma di parallelepipedo, ha per base una figura quadrilatera, le cui due dimensioni, cioè la larghezza e l' altezza del legno, diconsi *dimensioni della quadratura*; e quando queste due dimensioni son disuguali, il legno si dice *a due facce*.

Essendo 'l tronco d'un arbore, ovvero i suoi rami, fatto sempre come una spezie di colonna, che va diminuendo, ha per conseguenza due basi circolari, l'una inferiore, e l' altra superiore e minor dell'inferiore. Quindi, a fine di fare una giusta compensazione, per lo più prendesi 'l suo diametro verso 'l mezzo della lunghezza. Ora siccome la scorza, per l'opere che far si vogliono con tal sorta di legni, a nulla serve, così levansi tre pollici dal diametro, e si squadra 'l rimanente; il che dà in vero una quadratura più grande del bisogno, perocchè 'l quadro del diametro è maggiore del suo circolo: ma ciò viene in altra parte compensato dai tre pollici, che si levano per la scorza, non essendovi alcun' arbore, il quale ne abbia un pollice e mezzo. Tutta volta in tal genere di contratti io penso, che sia meglio seguitare l' uso stabilito fra Mercanti, senza cercare un'esatezza Geometrica, la quale già da essi non s'intenderebbe, e perciò temerebbono, che si volessero ingannare.

607. La misura, che serve per i legni, dicesi *Travicello*. Egli è un solido AB (*Fig.*382.), di cui la lunghezza AC è d'una pertica, o 6 piedi, la larghezza AD è di 12 pollici, o 1 piede, e l' altezza AH è di 6 pollici: così questo solido è di 3 piè cubi; poichè, moltiplicando la lunghezza 6 piedi per la larghezza 1 piede, il prodotto è 6 piè quadri, i quali moltiplicati per l' altezza 6 pollici, o mezzo piede ci danno 3 piè cubi. Se l'altezza AH si sega in 6 parti uguali, e che per i punti di divisione si seghi 'l travicello parallelo alla sua base, o in tutta la sua lunghezza, il travicello sarà diviso in 6 parti uguali, che si chiamano *piè di travicello*: così pure, dividendo l' altezza d'un piè di travicello in 12 parti uguali, e secondo queste divisioni tagliando 'l piede in tutta la sua lunghezza, egli sarà diviso in 12 parti uguali, che chiamansi *pollici di travicello*: alla fine, dividendo l' altezza d' un pol-

lice di travicello in 12 parti uguali, e segando 'l pollice in tutta la sua lunghezza secondo queste stesse divisioni, s'avranno 12 *linee di travicello*. Le dimensioni della quadratura nel travicello sono la larghezza AD, e l'altezza AH.

608. La pertica cuba, come sopra s'è detto (*N. 595.*), contiene 216 piè cubi, e'l travicello ne contiene 3 ; dividendo dunque 216 x 3, il quoziente 72 indica, che la pertica cuba contiene 72 travicelli, ovvero ch'essa è 72 volte maggiore del travicello. Ora, perchè la pertica cuba contiene 6 piedi, il piè 12 pollici, e 'l pollice 12 linee di pertica cuba, siccome 'l travicello contiene 6 piedi, e'l pollice 12 linee di travicello, ne segue, che i piedi, i pollici e le linee di pertica cuba sono pure 72 volte maggiori de' piedi, de' pollici, e delle linee di travicello.

609. Dopo le cose predette egli è da per se chiaro, che se conforme 'l solito si misura un pezzo di legno, per avere la sua solidità in pertiche, piedi, pollici e linee di pertica cuba, e che quindi si moltiplichi questa solidità per 72, il prodotto farà vedere quanti travicelli contenga questo pezzo di legno: or' eccone un' Esempio.

610. ESEMPIO. *Trovar' il numero de' travicelli, che si possono trarre da un tronco d' arbore, la cui lunghezza sia di 4 pertiche, 3 piedi, e 'l cui diametro preso nel mezzo della lunghezza sia di 3 piedi, 9 pollici, 6 linee.*

Dal diametro, per la ragione sopra indicata, levo 3 pollici, ed ho 0 pertiche, 3 piedi, 6 pollici, 6 linee ; quindi, facendone 'l quadrato, dico: se dovessi moltiplicare per una pertica, il prodotto sarebbe 0 pertiche, 3 piedi, 6 pollici, 6 linee ; dunque moltiplicando per 3 piedi, che sono la metà d' una pertica, non debbo aver se non se la metà di questo prodotto ; ch' è 1 piede, 9 pollici, 3 linee.

Sei pollici sono 'l sesto di tre piedi ; però pigliando 'l sesto del prodotto di tre piedi, ho 3 pollici, 6 linee $\frac{1}{2}$.

Per 6 linee, che sono la duodecima parte di 6 pollici, prendo 'l duodecimo del prodotto di 6 pollici, ed ho 3 linee e $\frac{11}{24}$. Giugno insieme tutti questi prodotti, e 'l prodotto totale 0 pertiche, 2 piedi di pertica quadrata, 1 pollice, 1 linea ed $\frac{1}{24}$ è 'l quadro del diametro.

Moltiplico questo quadrato per la lunghezza 4 pertiche, 3 piedi, e 'l prodotto 1 pertica cuba, 3 piedi, 4 pollici, 10 linee di pertica cuba e $\frac{33}{48}$ è la solidità del tronco.

Per sapere quanti travicelli contenga questo prodotto, il moltiplico

plico per 72, poichè la pertica cuba contiene 72 travicelli, e dico: 72 × 1 fa 72 travicelli; quindi per 3 piedi prendo 36, ch'è la metà di 72, e per 4 pollici, che son la nona parte di 3 piedi, piglio 'l nono di 36, ch'è 4; finalmente divido 10 linee in due parti 8 e 2, di cui la prima 8 è 'l sesto di 4 pollici, e la seconda 2 è 'l quarto di 8: così io prendo 'l sesto di 4 travicelli, il che mi dà 4 piè di travicello, e poscia 'l quarto di 4 piedi, ed ho un piè di travicello. Per $\frac{33}{48}$ dico: due linee ci han dato un piè di travicello; dunque una linea ci dee

o pert.	3 pied.	7 pol.	6 lin.	
o	3	6	6	
o	1	9	3	
	o	3	6	$\frac{1}{2}$
		o	3	$\frac{13}{24}$
o	2	1	1	$\frac{1}{24}$
4	3			
1	2	4	4	$\frac{1}{6}$
	1	o	6	$\frac{25}{48}$
1	3	4	10	$\frac{33}{48}$
72 trav.				
36				
4		3		
o trav.	4 pied.			
	1			
		6 pol.		
		4	1	$\frac{1}{2}$
112 trav.	5 pied.	4 pol.	1 lin.	$\frac{1}{2}$

dare un mezzo piede, o 6 pollici; e ciò non è che un falso supposto, ch'io dovrò poscia cancellare: ora, 6 pollici fanno 72 linee, la cui quarantottesima parte è 1 linea $\frac{1}{2}$; onde moltiplicando 1 linea e $\frac{1}{2}$ per 33, il prodotto 49 linee $\frac{1}{2}$, o 4 pollici, 1 linea $\frac{1}{2}$ è ciò, che dee dar di prodotto la frazione $\frac{33}{48}$. Sommo tutti questi prodotti, ed ho 112 travicelli, 5 piedi, 4 pollici, 1 linea $\frac{1}{2}$ contenuti nel tronco proposto.

611. Se 'l pezzo di legno, che si dee misurare, fosse squadrato coll'asce, o con la sega, e che disuguali fossero le sue tre dimensioni, esse si moltiplicherebbero insieme, a fine d'avere la loro solidità; e quindi moltiplicando questa per 72, s'avrebbe 'l numero de' travicelli contenuti nel pezzo di legno.

612. O si moltiplichino prima insieme le tre dimensioni, e poscia la solidità per 72, o si moltiplichi prima l'una delle dimensioni della quadratura per 72, e quindi per l'altre dimensioni, il prodotto totale farà sempre il medesimo, per essere sempre gli stessi i moltiplicatori; dal che si è dedotto

 un'

un' altro metodo, il quale, come si vedrà, molto abbrevia il calcolo.

613. Si concepisca lo stesso tronco d'arbore, che da noi fù supposto nell'Esempio precedente; il suo diametro è 0 pertiche, 3 piedi, *6* pollici, *6* linee. Ora, prima di moltiplicarlo per se stesso, riduco i piedi in pollici, li quali aggiugnendo ai *6*, ho 42 pollici, *6* linee. Metto i 42 pollici nel posto delle pertiche, e quind' io vengo a fare lo stesso, che se moltiplicassi 42 pollici per 72, perocchè la pertica è 72 volte maggiore del pollice. Per ciò che riguarda le *6* linee, veggo benissimo, che mettendole nel posto de' piedi, diverrebbero 144 volte maggiori, a cagione che 'l piede contiene 144 linee; e conseguentemente queste linee, in vece d' esser moltiplicate per 72, sarebbero moltiplicate per 144, o 2 volte 72, il ch' è la metà di più; però, in vece di *6*, nel posto de' piedi pongo la sua metà, cioè 3, ed ho 42 pertiche, 3 piedi, ovvero l'equivalente di 42 pollici, *6* linee il tutto moltiplicato per 72.

Moltiplico 42 pertiche, 3 piedi per 0 pertiche, 3 piedi, *6* pollici, *6* linee, e 'l prodotto 25 pertiche, 0 piedi, *6* pollici, 3 linee è 72 volte maggiore di quello conviene per essere il quadrato del diametro; e in conseguenza questo prodotto è 'l quadro del diametro moltiplicato per 72.

42 *pert.*	3 *pied.*			
0	3	*6 pol.*	*6 lin.*	
21	1	*6*		
3	*6*	3		
0	1	19	3	
25	0	*6*	3	
4	3			
100	2	1	0	
12	3	3	3	$\frac{1}{2}$
112 *trav.*	5 *pied.*	4 *pol.*	1 *lin.*	$\frac{1}{2}$

Moltiplico questo prodotto per la lunghezza 4 pertiche, 3 piedi, e 'l prodotto 112 pertiche, 5 piedi, 4 pollici, 1 linea $\frac{1}{2}$ è 72 volte maggiore di quello conviene per essere la solidità del tronco; dunque questo prodotto è 'l numero de' travicelli contenuti in detto tronco.

Delle

Delle Frazioni Decimali .

614. Se in vece di dividere la pertica in piedi , pollici e linee, ella ſi divide in 10 parti, ognuna delle quali ſia $\frac{1}{10}$; poi ciaſcuna decima in dieci parti, che ſieno decime di decime , o centeſime ; indi ciaſcuna centeſima in dieci parti, che ſieno decime di centeſime , ovvero milleſime, e così ſucceſſivamente, le frazioni $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{100000}$, ec. ſi nomeranno *Frazioni decimali*.

615. Le decime chiamanſi *Prime*, le centeſime ſi dicono *Seconde*, le milleſime *Terze* , ec.

616. Per levarſi dall' impaccio de' numeratori e denominatori , ſcriveſi $1'$, $2'$, $3'$, ec. in vece di $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$, ec. ſimilmente , in vece di $\frac{1}{100}$, $\frac{2}{100}$, $\frac{3}{100}$, ec. ſcriveſi $1''$, $2''$, $3''$, ec. e così a mano a mano : tal che per eſprimere una quarta, ſcriveſi 1^{IV}; per eſprimere una quinta, ſcriveſi 1^{V}, ec. e finalmente , per accenare uno, due, o tre interi, ſi ſcrive 1°, 2°, 3°, ec.

617. Con tal mezzo facilmente s' evitano il tedio e le difficoltà, che ſovente provanſi nel calcolo ordinario delle frazioni, come ora vedremo .

618. Per ridurre 3°, $5'$ all' ultima ſpezie, cioè in prime, non ſi ha che ſcrivere $35'$; poichè 3° , $5'$ equivagliono a $3\frac{5}{10}$: ma per ridurre $3\frac{5}{10}$ in decime convien moltiplicare l' intero 3 per 10 , il che fa 30, poi aggiugnervi 5 , il che fa 35, e finalmente ſcrivere $\frac{35}{10}$, ch' equivagliono a $35'$; dunque ec.

Per queſta ſteſſa ragione, ſe voglio ridurre 2°. $3'$. $4''$ all' ultima ſua ſpecie, cioè in ſeconde, ſcrivo $234''$; imperocchè per ridurre le prime, o decime $3'$ in centeſime, le debbo moltiplicare per 10, il che ſi fa ſcrivendo $34''$, mercè che'l numero 3 diviene in tal modo dieci volte maggiore di quello ſarebbe, eſſendo ſolo ; e per ridurre l' intero 2°. in ſeconde, o centeſime, conviene che lo moltiplichi per 100, il che ſi fa ancora ſcrivendo $234''$, a motivo che 'l numero 2 diviene in tal modo maggiore di quello dee eſſere . Dunque , ec.

619. Per ridurre $35'$ in intero, ſcriveſi 3°. $5'$, poichè $35'$ equivagliono a $\frac{35}{10}$. Ora, per ridurre $\frac{35}{10}$ in intero, convien dividere 35 per 10, e'l quoziente 3 denota 3 interi con un reſiduo $\frac{5}{10}$; dunque, ec. Similmente , per ridurre $234''$ in intero , ſcriveſi 2°. $3'$. $4''$, a cagione che i numeri 3 e 2, per eſſere ſoli , diventano minori , il primo dieci volte , e l'altro cento . Così egli è lo ſteſ-

ſo

ſo che ſe aveſſi diviſo 234 × 100, il che dà 2 interi, e quindi il 34 rimanente per 10, ciò che avrebbe dato 3 decime e 4 centeſime.

620. Per ſommare $2^{\circ}.\ 3'.\ 4''$ con $3^{\circ}.\ 2'.\ 3''$ riduconſi prima entramb'i numeri all' ultima ſua ſpezie, il che dà $234''$ e $323''$, poi ſacendone la ſomma ſi ha $557''$, ovvero $5^{\circ}.\ 5'.\ 7''$; e per fare la ſomma di $2^{\circ}.\ 3'.\ 4''.\ 5'''$ con $3^{\circ}.\ 2'.\ 3''$ riduconſi amendue i numeri all'ultima ſua ſpezie, il che dà $2345'''$ e $323''$; ma ſiccome queſti due numeri ſon di differente ſpezie, così e' s'aggiugne un zero all' ultimo; il che fa $3230'''$, che ancora equivagliono a $325''$, perocchè $325''$ equivagliono a $\frac{325}{100}$, e $3230'''$ a $\frac{3250}{1000}$, e perchè le due frazioni $\frac{325}{100}$ e $\frac{3250}{1000}$ ſon ſimili: quindi è, che giugnendo inſieme $2345'''$ e $3250'''$ la ſomma ſarà $5595'''$, o $5^{\circ}.\ 5'.\ 9''.\ 5'''$.

621. Per ſottrarre $2^{\circ}.\ 3'.\ 4''$ da $4^{\circ}.\ 5'.\ 3''$, il tutto ſi riduce alle ſue ultime ſpezie, il che dà $234''$ e $453''$; poi, facendo la ſottrazione, il reſiduo è $219''$, ovvero $2^{\circ}.\ 1'.\ 9''$: e per ſottrarre $2345'''$ da $654''$, aggiugneſi un zero all' ultimo, il che dà $6540'''$; quindi, facendo la ſottrazione, il reſiduo è $4195'''$, o $4^{\circ}.\ 1'.\ 9''.\ 5'''$.

622. Per moltiplicare $235''$ per $32'$, faccio la moltiplicazione al ſolito, il che mi dà di prodotto 7520, ed unendo il carattere della prima a quel delle ſeconde, ſcrivo $7520'''$; imperocchè $235''$ equivagliono a $\frac{235}{100}$, e $32'$ a $\frac{32}{10}$: ora, per moltiplicare delle centeſime per delle decime, ovvero 100 × 10, baſta che aggiugna un zero, il che dà $\frac{1}{1000}$; e per eſprimere delle milleſime, p. e. 3, ſcrivo $3'''$; dunque, ec. Similmente, per moltiplicare $235''$ per $2351'''$, ſi fa prima l'ordinaria moltiplicazione, il che dà di prodotto 552481^{v}, poſcia ſommando il carattere delle ſeconde a quel delle terze, ſcriveſi 552481^{v}, e così dell'altre; imperocchè le ſeconde, od $\frac{1}{100}$ moltiplicate per le terze, o $\frac{1}{1000}$, danno di prodotto $\frac{1}{100000}$, ovvero delle quinte.

623. Per dividere $2784'''$ × $232''$, faccio la diviſione al ſolito, ed ho 12 per quoziente; poi, dal carattere delle terze ſottraendo quel delle ſeconde, ſcrivo $12'$, o $1^{\circ}.\ 2'$, imperocchè diviſe le terze, od $\frac{1}{1000}$ per le ſeconde, od $\frac{1}{100}$, danno per quoziente delle decime, o delle prime, ec.

624. Queſto calcolo ſarebbe in ſoſtanza così bello come lo è apparentemente, ſe tutte le miſure ridurſi poneſſero in decime, poi in decime di decime, ec. ma finchè ſuſſiſteranno le diviſioni, o ſuddiviſioni ordinarie, non s'avrà alcun vantaggio, a motivo che ſi dovran ſempre valutare le prime, ſeconde, o terze, che ſi troveranno.

625. Sup-

Supponiamo p. e. ch'una ſuperficie abbia $2^{\circ}.\ 3'.\ 2''$ di larghezza, e $3^{\circ}.\ 2'.\ 3''$ d'altezza. Per ritrovar'il valore di detta ſuperficie debbo moltiplicare $232'' \times 323''$, ed ho 74936^{IV}, ovvero $7^{\circ}.\ 4936^{IV}$, o finalmente 7 pertiche quadre $\frac{4936}{10000}$. Ora, s'io voglio ſapere quanti piè di pertica quadrata contenga queſta frazione, dico per la Regola del Tre: ſe diviſa la pertica in 10000 parti, ne ho 4936, quante ne avrò, eſſendo la ſteſſa diviſa in 6 piedi? E per la Regola del Tre io trovo 2 piedi ed una frazione $\frac{9616}{10000}$; e per valutare queſta ſeconda frazione conviene, ch'io moltiplichi 'l numeratore 9616×12, e che divida 'l prodotto per 10000; il che mi dà 11 pollici ed una frazione $\frac{5392}{10000}$, ch'io debbo ancora valutare; e così ſucceſſivamente: ora, egli è per ſe manifeſto, che queſte valute ſon più faticoſe di quelle ch'io avrei fatte, ſe mi foſſi ſervito del calcolo delle diviſioni e ſuddiviſioni ordinarie, a motivo ch'i numeratori e denominatori ſono molto più grandi; dunque egli è altresì manifeſto, che 'l calcolo delle decimali non apporta alcun vantaggio, e ſe bene ci paja nel principio d'evitare alcune difficoltà, ci troviamo neceſſariamente oppreſſi da difficoltà maggiori ſul fine del calcolo.

CAPITOLO DUODECIMO.

DELLE SEZIONI CONICHE.

Diffinizioni, e Principj.

626. Dato uno ſpazio ABC (*Fig.* 333.), terminato da una curva ABC ſempre concava dalla ſteſſa parte, con più rette MN, OP, QR, ec. fra loro parallele, e che d'ambe le parti terminino alla curva, ſe trovaſi una retta XZ, la quale ſeghi le parallele ciaſcuna per mezzo, ella chiamaſi *Diametro* della curva, quando non è perpendicolare alle parallele; ed *Aſſe*, quando è ad eſſe perpendicolare. Il punto B, in cui la linea XZ ſega la curva, diceſi *Vertice* del diametro, o dell'aſſe; le parallele MN, OP, ec. appellanſi *Doppie ordinate*; le loro metà HN, VP ſono l'*ordinate*, e le parti BH, BV, ec. del diametro, o dell'aſſe, compreſe fra 'l vertice B e ciaſcun'ordinata, ſono l'*Aſſiſſe*. Così l'aſſiſſa dell'ordinata HN è la retta BH; quella dell'ordinata VP ſi è la retta BV, ec.

Se

Se da qualsivoglia punto M preso sopra la curva tirasi un'ordinata MH, ed una tangente MX, che seghi 'l diametro, o l'asse prolungato in X, la parte XH di quest'asse, o diametro compreso fra la tangente MX e l'ordinata MH, dicesi la *Suttangente*; e se al medesimo punto M s'alza sopra la tangente MX una perpendicolare MY, che tagli l'asse in Y, la parte HY di quest'asse, compresa fra l'ordinata MH e la perpendicolare MY, chiamasi la *Superpendicolare*. Mediante queste linee ed i rapporti, che esse hanno fra loro, ben si conoscono le proprietà delle curve.

627. Se intorno il lato fisso AB si fa girare un triangolo rettangolo ABC (*Fig.* 384.), agevol fia concepire, ch'ei descriverà un cono retto ACH, e che li suoi elementi DE, FG, ec. paralleli alla base CB descriveranno de' circoli, i quali avran tutt' i loro centri sopra la retta AB, ch'in conseguenza sarà l'asse del cono. Ora, quindi 1°. ne segue, che se da qualsivoglia punto Q della circonferenza della base del cono tirasi una retta QA al vertice A, ella sarà interamente sopra la superficie del cono; perocchè essa altro non sarà che la retta CA del triangolo genitore ABC, quando, ravvolgendosi, giunto sarà alla posizione ABQ. 2°. Ch'in qualsivoglia punto D si tagli 'l cono con un piano parallelo alla sua base, detto piano sarà un circolo; poichè non differirà dal circolo descritto dall'elemento DE. 3°. Finalmente, che se si taglia un cono con un piano perpendicolare alla base, e che passi pel centro B, la sezione sarà un triangolo; poichè, essendo l'asse BA perpendicolare alla base, egli sarà nel piano segante, il quale passerà in conseguenza pel vertice A; e la comun sezione del piano segante e della base sarà un diametro CH della base: così, per i punti C ed H tirando al vertice le rette CA, CH, le quali come si è detto, saran sulla superficie del cono, esse col diametro CH formeranno un triangolo simile al piano segante.

628. Se in un cono BAC (*Fig.* 385.) si concepisce la sezione triangolare BAC, in cui una linea DE sia parallela ad uno de' lati AB, e che mediante un piano perpendicolare al triangolo, e che passi per la linea DE, si seghi 'l cono; la sezione sarà una superficie piana QDO terminata da una curva QDO, la quale dicesi *parabola*.

629. *La retta* DE *è l'asse della parabola*.

Imperocchè, se tagliasi 'l cono e la parabola con infiniti piani MN, ec. paralleli alla base BC del cono, tutti questi piani, o circoli saranno perpendicolari al triangolo BAC, poichè egli lo è

alla

alla base BC; e siccome allo stesso triangolo è altresì perpendicolare la parabola, così ne segue, che le rette RT, ec. OQ, comuni sezioni de' circoli MN, ec. BC e della parabola, saran perpendicolari al triangolo (*N.* 478.), e conseguentemente alle rette MN, BC, DE, le quali son nel piano di detto triangolo, e si segano ne' punti S, E, per cui passan le perpendicolari RT, OQ (*N.* 463.) : ora MN, ec. BC sono i diametri de' circoli, ed RT, ec. OQ le loro corde; perpendicolari essendo dunque queste corde a' loro diametri, elle son divise per mezzo in S, ec. E, e per conseguenza la retta DE, che passa per tutti detti punti, sega per mezzo le rette RT, OQ; e poichè essa è loro perpendicolare, ella è altresì 'l loro asse (*N.* 626.).

630. *La proprietà principale della parabola si è, che i quadri dell' ordinate* ST, EQ *sono fra essi come le lor' assisse* DS, DE.

Ne' circoli MN, BC, abbiamo $\overline{ST}^2 = MS \times SN$, ed $\overline{EQ}^2 = BE \times EC$; dunque $\overline{ST}^2 . \overline{EQ}^2 :: MS \times SN . BE \times EC$. Ma, a cagione delle parallele AB, DE, le parallele MS, BE sono uguali; onde i rettangoli MS × SN, e BE × EC avendo una dimensione uguale, sono fra loro come le dimensioni disuguali SN, EC: così noi abbiamo $\overline{ST}^2 . \overline{EQ}^2 :: SN . EC$. Ora i triangoli simili DSN, DEC ci danno SN . EC :: DS . DE; dunque $\overline{ST}^2 . \overline{EQ}^2 :: DS . DE$.

631. Se in un cono retto BAC (*Fig.* 386.) si concepisce la sezione triangolare BAC con una retta DE, che segh' i lati in modo che paralleli non sieno alla base BC, e che si tagli 'l cono con un piano perpendicolare al triangolo, e che passi per la retta DE, la sezione sarà una superficie piana terminata da una curva DTPEQR, che noi chiameremo *Elisse*.

Se co' piani FG, HI, ec. paralleli alla base BC si segano il Cono e l' Elisse, mostreremo come nella parabola, che le comuni sezioni TR, PQ, ec. di questi piani, o circoli, e dell' elisse son perpendicolari alla retta DSE, che le taglia per mezzo, e che conseguentemente è 'l loro asse (*N.* 626.).

632. *La proprietà principale dell' elisse si è, ch' i quadri dell' ordinate* TS, PO *sono fra loro come i rettangoli* DS × SE, DO × OE *delle parti dell' asse, cui elle segano.*

A motivo de' circoli FG, HI, abbiamo $\overline{TS}^2 = FS \times SG$, e $\overline{PO}^2 = HO \times OI$; dunque $\overline{TS}^2 . \overline{PO}^2 :: FS \times SG . HO \times OI$: ora, i triangoli simili FSD, HOD ci danno FS . HO :: DS . DO; e a cagione de' triangoli simili GSE, IOE abbiamo GS . IO :: SE . OE; onde moltiplicando insieme i termini di queste due proporzioni, avremo $FS \times GS . HO \times IO :: DS \times SE . DO \times OE$: ma egli s'è trovato $\overline{TS}^2 . \overline{PO}^2 :: FS \times GS . HO \times IO$; dunque $\overline{TS}^2 . \overline{PO}^2 :: DS \times SE . DO \times OE$.

633. Se in un cono retto BAC (*Fig.* 387.) si concepisce la sezione triangolare BAC con una retta DE perpendicolar' alla base BC e differente dall'asse, e che si tagli 'l cono con un piano perpendicolare al triangolo, e che passi per la retta DE, la sezione sarà una superficie piana terminata da una curva DQO, la quale dicesi *Iperbola*.

Se co' piani MN, ec. paralleli alla base BC, segansi l'iperbola e'l cono, mostreremo come nella parabola, che le rette RT, OQ son perpendicolari a DE, che le sega per mezzo, e ch'in conseguenza è'l loro asse (*N. 626.*).

Se si concepisce un cono XAZ opposto al vertice BAC, e che, prolungato il lato BA del triangolo BAC in Z, si prolunghi la retta DE fino al concorso di AZ in Z, la parte DZ di questa retta compresa fra i due coni dicesi *primo Asse dell'Iperbola*. Del secondo poi ne parleremo a suo luogo.

634. *La proprietà principale dell'iperbola si è, ch'i quadri dell' ordinate* ST, EQ, *ec. sono fra loro come i rettangoli* $SD \times SZ$ $ED \times EZ$ *formati sotto l'assisse* SD, ED *e le rette* SZ, EZ, *ch' son l'asse* ZD *prolungato fino all'ordinate.*

A cagione de' circoli MN, BC, abbiamo $\overline{TS}^2 = MS \times SN$, e $\overline{QE}^2 = BE \times EC$; dunque $\overline{TS}^2 . \overline{QE}^2 :: MS \times SN . BE \times EC$; ma i triangoli simili MSZ, BEZ ci danno MS . BE :: SZ . EZ, e a motivo de' triangoli simili DSN, DEC abbiamo SN . EC :: DS . DE; però moltiplicando fra loro i termini di queste due ultime proporzioni, avremo $MS \times SN . BE \times EC :: SZ \times DS . EZ \times DE$: ora, noi abbiam ritrovato $\overline{TS}^2 . \overline{QE}^2 :: MS \times SN . BE \times EC$; onde $\overline{TS}^2 . \overline{QE}^2 :: SZ \times DS . EZ \times DE$.

L'al-

L'altre proprietà delle sezioni coniche si considereranno in un piano, perocchè troppo imbroglio sarebbe, se si volessero considerare nello stesso cono.

Della Parabola considerata in un Piano fuori del cono.

635. PROBLEMA. *Sopra un piano descrivere una parabola* (Fig. 388.).

Piglio una linea indefinita AB, ch'io chiamo la *Direttrice*: sul punto di mezzo C alzo una perpendicolare indefinita CS, su cui io prendo ad arbitrio due parti uguali CD, DO, e chiamo 'l punto O *Fuoco*: concepisco, che sopra tutt'i punti di DS sieno alzate delle perpendicolari indefinite MN, PQ, RT, VX, ec. col compasso piglio la distanza HC dalla perpendicolare PQ alla direttrice, e portando l'una delle punte del compasso sopra 'l fuoco O, con detta apertura descrivo un' arco, che seghi PQ in due punti P, e Q: piglio parimente la distanza LC dalla perpendicolare VX alla direttrice, e portando l'una delle punte del compasso al fuoco O, descrivo con ess' apertura un' arco, il quale seghi la perpendicolare in due punti V, X: lo stesso io faccio rispetto all' altre perpendicolari, che per conseguenza tutte mi danno due punti equidistanti da CS, toltane la retta MN, la quale altro non mi dà che 'l punto D; poichè la sua distanza DC alla direttrice essendo uguale alla distanza OD, l'arco, ch' io descriverei con questa distanza, prendendo 'l fuoco per centro, non farebbe che toccar detta perpendicolare MN in D senza tagliarla; e per quello sia l'altre perpendicolari, come EF, che segherebbero la parte CD, è evidente, che prendendo le loro distanze GC alla direttrice, e pigliando per centro il fuoco, l'arco descritto con quest' apertura non segherebbe la perpendicolare, a motivo di OG maggiore di GC. Facendo dunque passare una curva ZVRPDQTXY per tutt' i punti ritrovati, l' asse di questa curva è la retta DS, le sue ordinate sono le rette PH, RO, ec. e le sue assisse son le rette DH, DO, ec. Or manca solo a far vedere, che questa curva è una parabola.

Quì vi sono due sorte d'ordinate; l'une VL, ZK, ec. che sono al di sotto del fuoco, e l'altre, come PH, tra 'l fuoco O, e 'l vertice D. Cominciamo dalle prime.

Dal fuoco O all'estremità dell' ordinata VL tiro la retta OV (*Fig.* 389.), il che mi dà un triangolo rettangolo VOL, in cui $\overline{VL}^2 = \overline{VO}^2 - \overline{OL}^2$; e a motivo di VO = LC, per

la costruzione, ho $\overline{VL}^2 = \overline{LC}^2 - \overline{OL}^2$, e facendo i quadri LB, LR di LC, ed LO, ho'l quadrato $\overline{VL}^2$ uguale al gnomone, o alla squadra CBFIRO: ora, essendo la linea CL divisa in due parti CO, OL, il gnomone contiene'l quadrato RB della parte CO, più due rettangoli uguali CR, RF delle parti CO, OL (*N.* 140.): così, segando per mezzo il quadrato RB colla retta MN parallela ad RE, e dando la metà di questo quadro a ciascuno de' due rettangoli, il gnomone sarà uguale a due volte il rettangolo IMNF, cioè ad IM moltiplicato per due volte IF: ma $IM = DL$; imperocchè, a motivo di $HR = CO$, e del punto M che divide per mezzo HR come lo è CO in D, si ha $DO = MR$, e $DO + OL = MR + RI = MI$, e a cagione di $LC = LF$, e di $LI = LO$, si ha $IF = OC$; dunque'l rettangolo $IMNF = DL \times OC$, e per conseguenza $2IMNF = DL \times 2OC$, cioè 'l gnomone, o 'l quadro dell' ordinata VL equivale all' assissa corrispondente DL moltiplicata per due volte la distanza OC dal fuoco alla direttrice, ovvero per quattro volte la distanza OD dal fuoco al vertice. Ora io proverò nello stesso modo, che 'l quadro dell' ordinata ZY equivale alla sua assissa DY moltiplicata per quattro volte la distanza OD; onde i quadri dell' ordinate VL, ZV, ec. sono fra loro come le lor'assisse DL, DV, ec. moltiplicate ciascuna per 4OD, e per consequenza come le loro assisse, a cagione del comun moltiplicatore 4OD.

Ora, tra'l fuoco O e'l vertice D sia un'ordinata PM(*Fig.390.*). Da O tiro la retta OP, e nel triangolo rettangolo PMO ho $\overline{PM}^2 = \overline{PO}^2 - \overline{MO}^2 = \overline{MC}^2 - \overline{MO}^2$; poichè, per la costruzione, ho $PO = MC$: faccio 'l quadro CH di CM, e prendendo $CL = MO$ faccio 'l quadro CR; e conseguentemente il quadro $\overline{PM}^2$ equivale al gnomone MHASRL, che contiene il quadro RH della parte LM, e due rettangoli AR, RM delle parti CL, LM: colla linea QX divido per mezzo il quadrato RH; e dando a ciascun rettangolo la metà di esso quadro, il gnomone, o quadro PM equivale a due volte il rettangolo SXQA, o a $2SX \times SA$: ma $SA = LM$, ed $LM = 2MD$, a motivo di $DO = DC$, e di $MO = CL$; onde 'l quadro $\overline{PM}^2 = 2SX \times 2MD = 4SX \times MD$, cioè l'quadro dell'ordinata PM equivale alla sua assissa MD moltiplicata per 4SX, o 4CD, o 4DO: così 'l quadro dell'ordinata

nata PM è al quadro dell'ordinata VE, ch'è sotto il fuoco, come l'affissa DM moltiplicata per 4DO è all'affissa DE moltiplicata per 4DO, o come DM è a DE; dunque la curva è una parabola (*N. 630.*).

636. La retta uguale a 4DO dicesi *Parametro* dell'asse.

637. COROLLARIO I°. *La retta* MN (Fig. 388.) *parallela all'ordinate, e che passa pel vertice* D, *è tangente della parabola.*

Poichè tutti gli altri punti della parabola sono, per la costruzione, al di sotto di questa retta.

NOTA. Che la parabola, che si vuol costruire mediante più punti, sarà tanto più esatta, quanto più prossime saranno fra loro le perpendicolari PQ, RT, ec. (*Fig.* 388.).

638. COROLLARIO II. *Essendo dal fuoco* O (Fig. 391.) *tirata una retta* OS *segante la parabola in qualsivoglia punto* V : *dico* 1°. *Che se dal punto* V *alla direttrice tirasi una perpendicolare* VT, *ella sarà sempre uguale alla retta* VO *compresa fra la curva, e'l fuoco.* 2°. *Che se dal punto* X *della retta* SO, *preso fra la curva e'l fuoco, tirasi sopra la direttrice una perpendicolare* XH, *ella sarà maggiore della retta* XO *compresa tra essa, e'l fuoco.* 3°. *Finalmente, che se dal punto* S *della retta* OS, *preso fuori della curva, tirasi sopra la direttrice una perpendicolare* SA, *ella sarà più corta della retta* SO *compresa tra essa, e'l fuoco.*

Dal punto V tiro l'ordinata VE all'asse, e per la costruzione della parabola ho EC = OV: ma a motivo delle parallele io ho EC = VT; dunque VT = VO; il che doveasi 1°. dimostrare.

Dal punto X tiro XR perpendicolare sopra TV; nel triangolo rettangolo VRX l'ipotenusa XV è maggiore del lato RV: ora noi abbiamo TV = XO; onde TV — VR, cioè TR è maggiore di VO — VX, cioè di XO: ma TR = HX; dunque HX è maggiore di XO; il che si dovea 2°. dimostrare.

Da V tiro VM perpendicolare ad SA, e nel triangolo rettangolo SMV ho MS minore di SV. ora noi abbiamo TV, od AM = VO; dunque AM + MS è minore di VO + VS, cioè AS è minor di SO; il che doveasi 3°. dimostrare.

639. COROLLARIO III. Dunque, 1°. quando la perpendicolare VT, tirata sopra la direttrice, equivale ad VO, il punto V è sopra la curva. 2°. Quando la perpendicolare XH è maggiore di XO, il punto X è tra la curva, e'l fuoco. 3°. Quando la perpendicolare SA è minore di SO, il punto S è fuori della curva.

640. PRO-

640. PROBLEMA. *Da un dato punto* P (Fig. 392.) *preso sopra la curva d'una parabola fuori del vertice* A *dell' asse tirar' una tangente alla parabola.*

Da P tiro l'ordinata PS, la retta PR perpendicolare alla direttrice, e la retta PO al fuoco O; giugno la retta RO, ch'io divido per mezzo in H, e per i punti P, H tirando la retta PHT, ella sarà la tangente ricercata.

Poichè se vogliamo, che la retta PT tocchi la curva in qualche altro punto, ei sarà o infra P e T, come in M, o al di là, come in Z: posto dunque ch'egli sia in M, tiro da M la retta MO al fuoco, la retta MR al punto R, e la retta MV perpendicolare alla direttrice. Il triangolo RPO sarà isoscele; poichè per le parallele abbiamo PR = NS, e per la costruzione della parabola PO = NS: ora, perpendicolare essendo la retta PH sopra'l mezzo di RO, tutt'i suoi punti, come M, son' equidistanti da R, ed O; dunque RM = MO, e'l triangolo RMO è isoscele: ma nel triangolo rettangolo RVM l'ipotenusa RM è maggiore del lato MV; onde MO è altresì maggiore di MV, e per conseguenza il punto M è fuori della parabola (*N. 639.*). Nello stesso modo si proverà, che'l punto Z è fuori della parabola: però la retta ZT tocca la parabola solo in P.

641. COROLLARIO I°. *La suttangente* TS *è segata per mezzo al vertice* A *dell'asse.*

I triangoli rettangoli PRH, THO son simili ed uguali, a motivo dell'angolo acuto RPT uguale al suo alterno PTO, il che rende i tre angoli uguali ciascuno a ciascuno, e del lato RH uguale al lato HO; onde PR = TO: ma PR = NS; dunque TO = NS; e da TO levando la parte AO, e dalla retta NS la parte NA = AO, per la costruzione della parabola ho TA = AS.

642. COROLLARIO II. Dunque, per tirare una tangente da un punto P, basta tirar l'ordinata, poi prolungare l'asse di là dal vertice, finchè TA sia uguale ad AS, e finalmente tirar la retta PT, che sarà la tangente ricercata.

643. COROLLARIO III. *Se sopra'l punto del contatto* P *s'alza la retta* PL *perpendicolare alla tangente, la superpendicolare* SL *equivale alla metà del parametro.*

Essendo la retta RO perpendicolare alla tangente, ella è in conseguenza parallela ed uguale a PL, a cagione delle parallele PR, LN, e la retta RN è altresì uguale a PS; onde i triangoli rettangoli PSL, RNO son simili ed uguali, ed SL = NO: ma NO è la

è la metà del parametro (*N. 636.*) ; dunque la superpendicolare SL equivale alla metà del parametro.

644. COROLLARIO IV. *Tutte le tangenti, che tirar si possono da ciascun punto della parabola, sono fra loro inclinate, e si segano tra i punti del contatto.*

Sieno i punti del contatto H, Q (*Fig.* 393.) presi l' uno a sinistra, e l' altro a destra dell' asse ; tiro l' ordinate HS, QE, e facendo AB = AS, ed AC = AE, la tangente al punto H sarà HB, e quella al punto Q sarà QC (*N.* 642.) : così, siccome queste due tangenti son' inclinate sopra l' asse, egli è manifesto, che prolungando la più corta HB, ella segherà l' altra in un punto D, il quale sarà fra i punti del contatto H, Q.

Sieno parimente i punti del contatto H, P presi dal medesimo lato dell' asse ; tirando l' ordinate HS, PN, e facendo BA = AS, ed AT = AN, la tangente del punto H sarà BH, o BX, e quella del punto P sarà PT : ora, non può PT andar' a terminare in T, ch' è più distante dal vertice A di quello sia il punto B, senza segar BX ; nè può PT segare BX fra B ed H, p. e. in R, imperocchè se ciò fosse, converrebbe ch' ella passasse fra l' asse e 'l punto H del contatto, e per conseguenza PT taglierebbe la parabola, e più non sarebbe tangente ; dunque di necessità conviene, ch' ella seghi BX in qualche punto M fra' i punti del contatto P, ed H.

645. COROLLARIO VI. *Una tangente* PT (Fig. 394.) *non può toccare la parabola in due punti.*

Altrimenti, se PT tocca la parabola in P ed R, la retta PR tirata fra questi due punti sarà la più corta, che tirar si possa : ora l' arco parabolico PR è una curva, e siccome per la formazione della parabola nel cono la sua concavità è sempre rivolta verso l' asse, la retta PR passar dee fra l' asse e la curva ; dunque PR, in vece di toccar la curva, dee segarla ; il che è contro l' ipotesi.

646. COROLLARIO VI. *Dallo stesso punto* P (Fig. 395.) *non si possano tirare due tangenti.*

Altramente la seconda segherà l' asse o in un punto C più vicino al vertice A che 'l punto T, in cui viene segato dalla prima tangente PT, o in un punto S più distante. Supponiamo, che lo seghi in C : piglio AN = CA ; da N tiro l' ordinata NQ, e da Q pel punto C tiro la retta QC, che sarà tangente in Q, per essere la suttangente NC doppia dell' assissa AN (*N.* 641.) ; e CQ

pro-

prolungata segherà PT in un punto M fra i punti del contatto P, Q (*N. 644.*) . Ora la seconda tangente, tirata dal punto P al punto C, passerà necessariamente fra M e Q, perchè altrimenti ella entrerebbe nella parabola: così la stessa taglierà CM fra M e Q, e poscia in Q, il ch'è impossibile; e lo stesso si proverebbe, se la seconda tangente tagliasse l'asse in S.

647. PROPOSIZIONE CXXVI. *Tutte le linee* DK (Fig. 396.) *parallele all'asse* AB *segano la parabola in un sol punto, e tutte le linee* RT *non parallele all'asse, e seganti la parabola in un punto la segano anche in un'altro.*

I quadri dell'ordinate essendo fra se come le lor'assisse, è manifesto, ch'a misura che maggiori son le assisse, maggiori sono anche i quadri dell'ordinate, e per conseguenza le stesse ordinate; così la curva della parabola vie più s'allontana dal suo asse: ora, per grande che sia la distanza DN dalla linea DK all'asse, ella è sempre la stessa, a cagione del parallelismo; dunque e' si troverà sempre qualche ordinata OF uguale a DN, e conseguentemente DK segherà la parabola in O: dopo di che, crescendo sempre l'altre ordinate, la curva via più s'allontanerà da DK, e per conseguenza ella non verrà più tagliata da DK; il che doveasi 1°. dimostrare.

Per ipotesi, la linea RT è obbliqua all'asse, e sega la parabola in R. Ora, da tutt'i punti H, X, ec. dell'arco parabolico indefinito RHXP si possono tirare delle tangenti MHN, SXQ, ec. le quali son tutte diversamente inclinate, tal che l'inferiori SXQ segano le superiori MHN (*N. 644.*) : così gli angoli NHE, QXF, ec. da esse formati coll'ordinate HE, XF tirate da punti H, X, ec. del contatto vanno crescendo, a misura ch'i punti del contatto s'allontanan dal vertice A della parabola. Necessariamente dunque e' conviene, che siavi qualche tangente, come QXS, la quale coll'ordinata XF formi un'angolo QXF maggiore dell'angolo formato dalla linea RT colla stessa ordinata: ma parallele in tal caso non essendo le rette QXS, RTS, esse si taglieranno in qualche punto S, il quale sarà fuori della parabola, per essere QXS tangente; onde la linea RT, ch'entra nella parabola in R, e che segherà la tangente QXS in S, bisogna, che di necessità seghi la parabola in un'altro punto T.

648. DIFFINIZIONE. Qualunque linea DK parallela all'asse AB (*Fig. 396.*) diceli *Diametro* della parabola; imperocchè sempre ritrovar si possono infinite linee parallele fra loro, e terminate dall'una e dall'altra parte alla curva, le quali sien segate ciascuna per mezzo dalla linea DK; come mostreremo in altro luogo.

649. PRO-

649. PROPOSIZIONE CXXVII. *Dato l'asse* AB (Fig. 397.), *un diametro* PR *e le lor tangenti* AP, NT *ai vertici* A, N, *il triangolo* TOA, *formato da queste tangenti e dall'asse, equivale al triangolo* PON, *formato dalle medesime tangenti, e dal diametro.*

I triangoli rettangoli TOA, PON son simili, per essere l'angolo acuto PNT uguale al suo alterno NTA: ma da N tirando l'ordinata NB all'asse si ha PN = AB, e noi abbiamo altresì AB = AT (*N. 641.*); però essendo il lato AB uguale al lato AT, i due triangoli sono insieme simili, ed uguali.

650. COROLLARIO. *Il rettangolo* PANB, *fatto dalla tangente* PA *e dall'ordinata* NB *coll'asse e col diametro, equivale al triangolo* NTB, *fatto dall'altra tangente coll'ordinata* NB, *e colla sua suttangente.*

Imperocchè, se a ciascuno de' triangoli uguali TOA, PON aggiugnesi 'l quadrilatero OANB, s'avrà PANB = NTB.

NOTA. Questa Proposizione e'l suo Corollario, per essere il fondamento di quasi tutto ciò che siam per dire, ricercano molta attenzione. Convien di più notare, che le tangenti NT, AP, comprese fra l'asse e'l diametro, sono egualmente tagliate ciascuna in O, poichè i triangoli TOA, PON simili ed uguali ci danno NO = OT, e PO = OA.

652. PROPOSIZIONE CXXVIII. *Dato l'asse* AB (Fig. 398.), *un diametro* PR *e le lor tangenti* AP, NT *ai vertici* A, N, *se da qualsivoglia punto* S *preso sopra la curva tiransi due rette* ZSX, CD, *parallele alle tangenti, si formeranno due triangoli, l'uno* SZD *coll'asse, e l'altro* CSV *col diametro; e dico* 1°. *Che 'l triangolo* SZD, *formato dalle parallele e dall'asse, equivale al rettangolo* PADC, *fatto dalla tangente dell'asse e dalla sua parallela fra l'asse, e'l diametro.* 2°. *Che 'l triangolo* CSV, *formato dalle stesse parallele e dal diametro, è uguale al parallelogrammo* NTZV, *formato dalla tangente del diametro e dalla sua parallela comprese fra'l asse, e'l diametro.*

Incominciamo dal triangolo fatto coll'asse; ma s'osservi. 1°. Che'l punto, da cui tiransi le parallele, può esser preso fra'l diametro e l'asse, come'l punto S; ed allora il triangolo fatto dalle parallele e dall'asse è ZSD. 2°. Che questo punto può esser preso di là dal diametro, come X, nel qual caso il triangolo fatto dalle parallele XZ, XB e dall'asse è ZXB. 3°. Finalmente, che questo punto può esser preso di là dall'asse, come'l punto E; ed in tal

caſo 'l triangolo formato dalle parallele DC, DH e dall'aſſe è DEH. Ciò poſto.

Se 'l punto è in S, già ſo, ch' il triangolo TNQ equivale al rettangolo PAQN (*N.* 650.) : ora, a cagione delle parallele NT, SZ, ed NQ, SD, detti due triangoli ſon ſimili, e di più ſono fra ſe come i quadri de' loro lati omologhi NQ, SD; onde

TNQ. ZSD : : $\overline{NQ}^2$. $\overline{SD}^2$: ma poichè NQ, SD ſon' ordinate all' aſſe, abbiamo $\overline{NQ}^2$. $\overline{SD}^2$: : QA. DA; dunque TNQ. ZSD : : QA. DA; e per la medeſima grandezza AP moltiplicando gli ultimi due termini, avremo TNQ, ZSD : : QA × AP, DA × AP: ora QA × AP = PAQN, e DA × AP = PADC; però TNQ, ZSD : : PAQN, PADC: ma TNQ = PAQN; dunque ZSD = PADC.

Così pure, ſe 'l punto, da cui tiranſi le parallele, è X, il triangolo TNQ è ſimile al triangolo ZXB fatto dalle parallele ZX, XB, e dall'aſſe; perciò s'avrà ancora TNQ. ZXB : : $\overline{NQ}^2$. $\overline{XB}^2$: : QA. BA : : QA × AP. BA × AP : : PAQN. PABR: ora TNQ = PAQN; dunque ZXB = PABR.

Finalmente, ſe 'l punto, da cui tiranſi le parallele, foſſe E, il triangolo TNQ ſarebbe ancora ſimile al triangolo DEH, fatto dalle parallele e dall'aſſe, a motivo dell' angolo acuto NTH uguale al ſuo alterno THE; ond' egli s' avrebbe pure TNQ. DEH : : $\overline{NQ}^2$. $\overline{DE}^2$ :: QA. DA :: QA × AP. DA × AP :: PAQN. PADC: ma TNQ = PAQN; dunque DEH = PADC. Il che doveaſi 1°. dimoſtrare.

Ora paſſiamo al triangolo formato colle parallele e col diametro. 1°. Se S è 'l punto, da cui tiranſi le parallele, il triangolo ſarà CSV; e dico: il triangolo TNQ equivale al rettangolo PAQN: quindi da TNQ levo 'l triangolo ZSD, e dal rettangolo PAQN il rettangolo PADC uguale al triangolo ZSD, come s'è veduto, e reſta TNLZ + SLQD = CDNQ; poi tolgo la parte comune SLQD, e reſta TNLZ = CSLN; finalmente all' una e all'altra parte io ſommo il triangolo NLV, ed avrò TNVZ = CSV.

2°. Se X è 'l punto, da cui tiranſi le parallele, il triangolo formato colle parallele e col diametro è VXR. Ora egli s'è trovato ZXB = PABR; dunque dal triangolo ZXB ſottraendo il trian-

triangolo ZSD, e dal rettangolo PABR il rettangolo PADC = ZSD, avremo SDBX = CDBR, e togliendone la parte comune SDBRV s' avrà XVR = CSV: ma CSV = NTZV; onde XVR = NTZV.

3°. Finalmente, se le parallele tiransi dal punto E, il triangolo formato colle parallele e col diametro sarà EKC: ora, il triangolo EDH fatto dalle stesse parallele coll' asse è uguale a PADC; però il triangolo EKC = PAHK; e sottraendo dal secondo membro il triangolo PNO, e collocando in sua vece il triangolo TOA = PON (*N. 649.*), avremo EKC = NTHK. Il che doveasi 2°. dimostrare.

653. COROLLARIO. *Qualunque linea* SX, *parallela ad una tangente* NT, *e terminata dall' una e dall' altra parte alla curva parabolica, è divisa per mezzo in* V *dal diametro* PR, *il quale passa per lo punto del contatto.*

Noi abbiam ritrovato il triangolo CSV uguale al triangolo XVR (*N. 652.*): ora questi due triangoli son simili, a cagione che gli angoli opposti al vertice sono uguali, e che l' angolo acuto VXR è uguale al suo alterno VSC; onde i lati di questo triangolo son' uguali, ed abbiamo SV = VX.

NOTA. Egli s' è detto dunque con ragione (*N. 648.*), che ciascuna linea PR parallela all' asse è un diametro; perciocchè in qualsivoglia punto N questa linea seghi la curva, non si farà che tirar' una tangente da esso punto, e quindi delle parallele a detta tangente comprese fra la curva; e sempre si proverà, che PR è un diametro; donde ne segue, che tutt' i diametri son paralleli all' asse.

654. COROLLARIO II. *Dunque le metà di tutte le linee, come* SV, *parallele ad una tangente* NT *sono l' ordinate del diametro* PR, *che passa pel punto del contatto* (*N. 626.*).

655. COROLLARIO III. *I quadri dell' ordinate a un diametro sono fra loro come l' assisse d' esso diametro.*

Sia il diametro PR (*Fig. 399.*), l' asse AB, le tangenti NT, AP, e le rette SM, EH ordinate al diametro PR; prolungo quest' ordinate fino all' asse, e da' punti S, E tiro delle rette SI, EL parallele alla tangente AP. Il triangolo ISM, fatto da due parallele alle tangenti e dal diametro, è dunque uguale al parallelogrammo NTOM (*N. 652.*), e per ciò anche il triangolo LEH equivale al parallelogrammo NTQH; onde ISM. LEH :: NTOM. NTQH:

NTQH : ora, poichè ſimili ſono i triangoli ISM, LEH, noi abbiamo ISM. LEH : : $\overline{MS}^2$. $\overline{HE}^2$; però $\overline{MS}^2$. $\overline{HE}^2$: : NTOM. NTQH : ma eſſendo queſti due ultimi termini, o parallelogrammi fra le ſteſſe parallele PR, TB, ſono tra eſſi come le lor baſi NM, NH ; dunque $\overline{MS}^2$. $\overline{HE}^2$: : NM. NH.

656. PROPOSIZIONE CXXIX. ***Se cercaſi una terza media proporzionale ad un' aſſiſſa* NM (Fig. 399.) *d' un diametro* PR, *e alla ſua ordinata* MS, *i quadri dell' ordinate a eſſo diametro ſaranno uguali alle lor' aſſiſſe moltiplicate per queſta terza proporzionale.***

Noi abbiamo $\overline{MS}^2$. $\overline{HE}^2$: : NM. NH (*N. 655.*) ; onde chiamando x la terza proporzionale, e moltiplicando le due aſſiſſe per la medeſima grandezza x, avremo ancora $\overline{MS}^2$. $\overline{HE}^2$: : NM $\times$ x. NH $\times$ x : ma per la proporzione continua : : NM. MS. x abbiamo $\overline{MS}^2 =$ NM $\times$ x ; cioè uguali ſono i due antecedenti $\overline{MS}^2$. NM $\times$ x della proporzione $\overline{MS}^2$. $\overline{HE}^2$ :: NM $\times$ x. NH $\times$ x ; dunque egli lo ſono altresì i due conſeguenti $\overline{HE}^2$, NH $\times$ x.

657. La terza media proporzionale all' aſſiſſa NM e all' ordinata MS d' un diametro PR diceſi 'l *Parametro* d' eſſo diametro ; poichè queſta proporzionale moltiplicando l' aſſiſſa, fa un prodotto uguale al quadro dell' ordinata, ſiccome riſpetto all' aſſe il prodotto dell' aſſiſſa per lo parametro equivale al quadro dell' ordinata.

658. COROLLARIO I°. ***Il parametro d' un diametro, eſſendo ſtato preſo terzo proporzionale ad una aſſiſſa* NM *e alla ſua ordinata* MS, *è parimente terzo proporzionale a qualſivoglia altra aſſiſſa* NH, *e alla ſua ordinata* HE.**

Poichè, chiamando x queſto parametro, abbiamo $\overline{HE}^2 =$ NH $\times$ x (*N. 656.*) ; dunque : : NH. HE. x.

659. COROLLARIO II. ***Se dal vertice* N *d' un triangolo* PR (Fig. 400.) *tiraſi un' ordinata* NB *all' aſſe, il parametro del diametro* PR *ſarà uguale al parametro dell' aſſe, più quattro volte l' aſſiſſa* AB *del medeſimo aſſe.***

Dal vertice A tiro l' ordinata AR al diametro PR ; così 'l parametro del diametro ſarà una terza proporzionale all' aſſiſſa NR, e all' ordinata AR : ma per le parallele NT, RA, ed NR, TA, abbiamo NR = TA, ed AR = NT ; onde 'l parametro del dia-

diametro sarà terza proporzionale alla metà TA della suttangente TB e alla tangente NT, e per conseguenza : : TA . TN . x ; dal che io deduco $\overline{TN}^2 = TA \times x$: ora, a cagione del triangolo rettangolo NTB, io ho $\overline{TN}^2 = \overline{NB}^2 + \overline{TB}^2 = AB \times 4AO + 4\overline{TA}^2 = TA \times 4AO + 4\overline{TA}^2$; poichè TA = BA (*N.*641.), e per la proprietà della parabola, $\overline{NB}^2 = AB \times 4AO = TA \times 4AO$, supponendo che 'l punto O sia 'l fuoco : se dunque si paragonano insieme i due valori di $\overline{TN}^2$, avremo $TA \times x = TA \times 4AO + 4\overline{TA}^2$; e 'l tutto dividendo per TA, il quoziente sarà $x = 4AO + 4TA = 4AO + 4AB$, cioè 'l parametro del diametro PR equivale a 4AO, o sia al parametro dell'asse, più quattro volte l'assissa AB.

660. COROLLARIO III. *Se dal vertice* N *d'un diametro* PR (Fig. 400.) *tirasi al fuoco la retta* NO, *ella sarà 'l quarto del parametro del diametro* PR, *siccome* AO, *tirata dal vertice dell'asse al fuoco, è 'l quarto del parametro dell' asse*.

Tiro la direttrice PQ, ed ho NO = LB = AB + LA ; cioè NO uguale all'assissa AB dell'asse, più 'l quarto del parametro di detto asse : ma il parametro del diametro è uguale a quattro volte l'assissa AB, più 'l parametro, o 4LA (*N.* 659.) ; dunque 'l parametro del diametro è quadruplo di NO.

661. COROLLARIO IV. *L'angolo* ONT *formato dalla retta* NO, *tirata dal vertice* N *del diametro* PR *al fuoco* O, *colla tangente* NT *equivale all'angolo* XNR, *fatto dalla medesima tangente col diametro* PR.

Dal punto P, in cui 'l diametro PR sega la direttrice, tiro al fuoco la retta PO ; così la tangente NT sega PO per mezzo in Z (*N.* 640.), e a cagione de' triangoli simili ed uguali PZN, TZO, ho PN = TO : ma PN = LB = NO per la costruzione della parabola ; onde NO = TO ; e per conseguenza isoscele essendo il triangolo NOT, l' angolo TNO equivale all'angolo NTO : ora questo equivale all'angolo XNR, a motivo delle parallele PR, TB ; dunque l'angolo ONT è uguale all'angolo XNR.

662. PROPOSIZIONE CXXX. *Dati due diametri, ovvero l' asse e due diametri insieme colle lor tangenti* PO, OM (Fig.401.), *se dall'uno all'altro punto del contatto tirasi la retta* PM *e dividesi per mezzo in* V, *la retta* OV *che passerà pe' punti* V *ed* O, *in cui le due tangenti si segano, sarà 'l diametro della retta* PM, *e delle sue parallele*.

La

La retta PM e le sue parallele han necessariamente un diametro, poichè l'infinite tangenti, che tirar si possono sopra ciascun punto dell'arco parabolico PM, essendo tutte diversamente inclinate fra loro, converrà che ve ne sia alcuna di parallela alla retta PM; e in conseguenza, dal punto del contatto di questa tangente tirando una linea parallela all'asse, ella segherà PM e ciascuna delle sue parallele in due parti eguali (*N. 653.*). Però se vogliamo, che la linea OV, la quale sega PM, non seghi per mezzo anche le parallele a PM, saravvi dunque qualche altra linea, che passerà pel punto V, e che dividerà per mezzo le parallele; e detta linea piglierà la sua direzione o a dritta, o a sinistra del punto O, in cui le tangenti PO, MO si segano, cioè fra i punti P, M del contatto (*N. 644.*). Supponiamo, che questa sia la linea VL; dal punto L tiro la retta LP segante la parabola, mercè che PO, la quale passa per lo stesso punto P, è tangente: così PL sarà una parte PE nella parabola. Tiro una retta ST, parallela a PM e segante PE in un punto R, e prolungo ST in H. I triangoli simili LPV, LRK ci danno PV. RK : : VL. KL; e a motivo de' triangoli simili LVM, LKH, ho VM. KH : : VL. KL; onde PV. RK : : VM. KH: ma PV = VM; dunque RK = KH: ora SK è maggiore di RK, e all'opposto KT è minore di KH; però SK è maggiore di KT, e per conseguente la retta LV, che divide PM in due parti uguali, non divide per mezzo la retta ST parallela a PM; donde avviene non esser questa un diametro.

Si proverà nello stesso modo, che qualunque altra linea, la quale passi pel punto V, e prendi la sua direzione fra P ed O, non è un diametro; dunque dovendone esser' uno, egli necessariamente sarà la retta VO.

663. COROLLARIO. *La retta* VO *tirata dal punto* O, *in cui le tangenti si segano, sopra'l mezzo della retta* PM, *che congiunge i punti del contatto, è parallela ai diametri* PZ, MN.

Poichè tutt' i diametri d'una parabola debbono esser paralleli all'asse (*N. 648, 653.*), e in conseguenza fra loro.

664. AVVERTIMENTO. Ciò che da noi s'è detto (*N. 649, 650 e 652*) rispetto all'asse e ad un diametro, puossi col mezzo della precedente Proposizione dimostrare anche rispetto a due diametri.

Sieno p. e. i due diametri PZ, MN (*Fig. 402.*) e le lor tangenti PT, MD, che si segano in O; tiro la retta PM, ch'io divido per mezzo in V, e la retta VO, la quale, essendo un diametro

metro (*N.662.*), è parallela ai due diametri PZ, MN; dal punto P tiro PN parallela alla tangente MD, e da M la retta MZ parallela alla tangente PT; e in conseguenza PN è ordinata al diametro MN, ed MZ al diametro PZ; e la figura POMR è un parallelogrammo. Ora, la diagonale PM è divisa per mezzo in V dalla retta OV; onde OV, essendo prolungata, dee essere l'altra diagonale, e passar dee pel punto R. Così, a motivo delle parallele PT, ZM, uguali sono le parallele PZ, OR, TM, cioè OR equivale a ciascuna delle rette PZ, TM; e a cagione delle parallele DM, PN, la retta OR è altresì uguale a ciascuna delle rette PD, NM; dal che ne segue, ch'uguali sono le quattro linee TM, MN, PD, PZ.

Dunque 1°. A motivo di TM = MN, la suttangente TN del diametro MN è divisa per mezzo al vertice M di esso diametro, e per conseguente essa è 'l doppio dell'assissa MN; e a motivo di DP = PZ, la suttangente DZ del diametro PZ è 'l doppio dell' assissa PZ.

Dunque 2°. I triangoli DOP, TOM formati dalle tangenti e dai diametri sono uguali; perocchè son simili, ed hanno il lato PD uguale al lato TM.

Dunque 3°. Il triangolo PTN, fatto dalla tangente PT, dalla suttangente TN e dall'ordinata PN al diametro MN, equivale al parallelogrammo MNPD, formato dalla medesima ordinata PN e dalla tangente MD dello stesso diametro MN contenute fra i due diametri. Poichè, se ad ognuno de' triangoli uguali TOM, DOP s'aggiugne la parte comune OPNM, s'avrà PTN = MNPD; e proveremo nello stesso modo, che MDZ = PZMT.

Dunque 4°. Se da qualsivoglia punto S (*Fig.* 403.) preso sopra la curva liransi XR, LH parallele alle due tangenti TP, MD, il triangolo HSR, fatto dalle due parallele col diametro MN, è uguale al parallelogrammo MDXR, formato dalla tangente MD di esso diametro e dalla sua parallela contenute fra i due diametri. Imperciocchè, tirando da P l'ordinata PN, avremo TPN = MDPN, come s'è veduto: ora, simili essendo i triangoli TPN, HSR, abbiamo TPN. HSR : : $\overline{PN}^2$. $\overline{SR}^2$: ma PN, SR, essendo ordinate al diametro MN, ci danno $\overline{PN}^2$. $\overline{SR}^2$: : MN. MR; dunque TPN. HSR : : MN. MR: ora, ritrovandosi i due parallelogrammi MNPD, MRXD fra due parallele, sono fra se come le lor basi

MN.

MN, MR; e perciò TPN. HSR : : MNPD. RXD : ma TPN = MNPD; dunque HSR = MRXD.

Proveremo altresì, che 'l triangolo XSL, fatto dalle due parallele e dall'altro diametro, equivale al parallelogrammo, formato dalla tangente PT di esso diametro e dalla sua parallela contenute infra i diametri; poichè, dall'altro punto del contatto M tirando l'ordinata MZ al diametro PZ, i triangoli simili DMZ, XSL saranno fra loro come i quadri delle lor basi, o dell'ordinate MZ, SL, ed in conseguenza come l'assisse PZ, PL, o come i parallelogrammi PTMZ, PTHL, i quali son nella stessa ragione delle loro basi PZ, PL, mercè che sono tra due parallele; dunque egli s'avrà DMZ. XSL : : PTMZ. PTHL : ma DMZ = PTMZ; onde XSL = PTHL.

Lo stesso si dimostrerà in qualunque punto della curva trovisi 'l punto S.

665. COROLLARIO. *Nella parabola, due tangenti* PT, DM (Fig. 403.), *le quali si segano andando a terminare ai diametri opposti, si tagliano ciascuna in due parti uguali.*

Poichè, simili essendo ed uguali i triangoli DOP, TOM, si ha PO = OT, e DO = OM.

666. PROPOSIZIONE CXXXI. *Se dati due diametri* PZ, MN (Fig. 404.) *colle lor tangenti* PT, MD *piglinsi sopra la curva due punti* R, S *fra i due vertici* P *ed* M, *e che da ciascuno di detti punti tirinsi delle rette* RL, RC, SH, *od* IH, SE, *od* XE *parallele alle tangenti, il trapezoide* QCES, *formato col diametro* MN *dalle due parallele* QC, SE *che lo segano, e dalla più vicina* HS *all'altre due, equivale al trapezoide* LRQH, *fatto coll'altro diametro* PZ *dalle due parallele* QH, RL *che lo segano, e dalla più vicina* RC *all'altre due.*

Essendo RC, LN parallele alle tangenti, abbiamo CRN = NMDL (*N. 664.*); e d'amendue le parti togliendo la parte comune RBMN, avremo CBM = BDLR: così pure, a motivo delle rette HI, SE parallele alle tangenti, abbiamo ESI = IHDM; e dall'uno e dall'altro lato sottraendo la parte comune SVMI, avremo EVM = VDHS, e per conseguenza CBM — EVM = BDLR — VDHS : ma CBM — EVM = CBVE; dunque CBVE = BDLR — VDHS, ovvero CBVE + VDHS = BDLR; e dall'una e dall'altro lato togliendo la parte comune VDHS, avrem finalmente CQSE = HQRL.

667. COROLLARIO. *Se a ciascuno de' trapezoidi uguali* CQSE, HQRL

HQRL *s' aggiugne il picciolo parallelogrammo* QRXS, *avremo* CRXE = HSXL; *cioè 'l trapezoide* CRXE, *formato col diametro* MN *dalle parallele* RC, XE, *che lo segano, e dalla più distante* XL *dall' altre due parallele, equivale al trapezoide* HSXL, *fatto coll' altro diametro dalle parallele* HS, LX, *che lo segano, e dalla più distante* XE *dall' altre due.*

NOTA. Questa Proposizione e 'l suo Corollario son nelle tre Sezioni Coniche di massimo giovamento, come si vedrà nelle seguenti Proposizioni spettanti alla parabola, ed in quelle, che daremo intorno l' Elisse e l' Iperbola.

668. PROPOSIZIONE CXXXII. *Se due rette* SX, RY (Fig. 405. 406. 407.), *che d' ambe le parti terminano alla curva parabolica, si segano nella parabola, il rettangolo* $SK \times KX$ *delle parti disuguali della prima è al rettangolo* $RK \times KY$ *delle parti disuguali della seconda, come 'l quadrato* $\overline{PO}^2$ *della tangente del diametro* PB *della prima è al quadro* $\overline{OM}^2$ *della tangente del diametro* MV *della seconda.*

O amendue le linee SX, RY segano l' arco parabolico PM compreso fra i due diametri PB, MV (*Fig.* 405.); o l' una SX (*Fig.* 406.) sega l' arco PM, e l' altra RY non lo sega; o finalmente non lo sega alcuna delle due (*Fig.* 407.).

Nel primo caso (*Fig.* 405.) prolungo le rette SX, RY fino al concorso de' diametri prolungati in E ed L, e da' loro punti S, R, che sono sopra l' arco PM, tiro le rette SH, RC parallele alle tangenti. Essendo la retta SX segata dal suo diametro in due parti uguali in B, e disuguali in K, abbiamo $SK \times KX = \overline{SB}^2 - \overline{KB}^2$ (*N.* 146.): ora, ne' triangoli simili BSH, BKL noi abbiamo $\overline{SB}^2 . \overline{KB}^2 :: BSH . BKL$ (*N.* 392.); dunque $\overline{SB}^2 - \overline{KB}^2 . \overline{SB}^2 :: BSH - BKL . BSH$, ovvero $\overline{SB}^2 - \overline{KB}^2 . BSH - BKL :: \overline{SB}^2 . BSH$, cioè $SK \times KX . KSHL :: \overline{SB}^2 . BSH$: ma i triangoli simili BSH, POD ci danno $\overline{BS}^2 . BSH :: \overline{PO}^2 . POD$; però $SK \times KX . KSHL :: \overline{PO}^2 . POD$, od $SK \times KX . \overline{PO}^2 :: KSHL . POD$. Con simile discorso io troverò, che $RK \times KY . \overline{OM}^2$ ::

: .: RCEK . TOM; da una parte dunque noi abbiamo SK × KX . $\overline{PO}^2$: : KSHL . POD, e dall'altra, RK × KY . $\overline{OM}^2$: .: RCEK. OMT .: ora, a motivo di KSHL = RCEK (*N. 667.*) , e di POD = OMT (*N. 664.*) , l'ultima ragione KSHL , POD della prima proporzione equivale all'ultima ragion RCEK, OMT della seconda; onde le due prime ragioni di queste proporzioni son' uguali; e dividendo, SK × KX . $\overline{OP}^2$: : RK × KY . $\overline{OM}^2$, od SK × KX . RK × KY : : $\overline{PO}^2$. $\overline{OM}^2$.

Nel secondo caso (*Fig. 406.*) prolungo XS in E, e da'punti S, X tiro le rette SH, XZ parallele alla tangente DM : così pure, dal punto R tiro la retta RC parallela alla tangente PT , e dal punto Q la retta QL parallela alla tangente DM. Ciò fatto , ragionando come sopra, troverò SK × KX. XKFZ :: $\overline{XB}^2$. XBZ : : $\overline{PO}^2$. POD, ovvero SK × KX. $\overline{PO}^2$: .: XKFZ . POD , e similmente RK × KY . $\overline{MO}^2$: : RCEK. MOT: ora POD = MOT; dunque s'io provo, che XKFZ = RCEK , avremo SK × KX . RK × KY : .: $\overline{PO}^2$. $\overline{MO}^2$. Ora, a fine di provarlo , osservo che XKFZ = XBZ — KBF , e che a motivo dell'ordinata XS divisa per mezzo in B , i triangoli simili XBZ , BHS sono uguali ; però XKFZ = BHS — KBF: ma a cagione delle rette SH , SB parallele alle tangenti , abbiamo BHS = PTEB (*N.664.*) ; onde XKFZ = PTEB — KBF .

Osservo pure, che la parte RGBK del trapezoide RCEF equivale al triangolo RGF meno'l triangolo KBF: ora, a motivo dell' ordinata RQ divisa per mezzo in G, i triangoli simili RGF, GQL sono uguali ; dunque RGBK = QGL — KBF : ma a cagione delle rette QL, QG parallele alle tangenti , noi abbiamo GQL = PTCG (*N. 664.*) . Onde RGBK = PTCG — KBF; e ad amendue i lati sommando la parte comune GCEB, avremo RCEK = PTEB — KBF .: ma egli s'è trovato XKFZ = PTEB — KBF; dunque RCEK = XKFZ.

Nel terzo caso (*Fig.*407.) da'punti R, S tiro delle parallele RC, SH alle tangenti, e da'punti Q , F , in cui queste rette tagliano la curva, io tiro parimente delle rette QL , FE parallele alle tangenti . Ciò fatto , noi avremo , come prima , SK × KX .

PO

$\overline{PO}^2$: : SHIK . POD, ed RK × KY . $\overline{OM}^2$: : RCNK . OMT , e a motivo di POD = OMT altro non ci resta a provare che SHIK = RCNK ; il che ci darà SK × KX , RK × KY : : $\overline{PO}^2$, $\overline{MO}^2$. Però io osservo, che a cagione dell' ordinata SF , divisa per mezzo in Z, i triangoli simili ZSN, ZEF son' uguali : ora, a motivo di FE, FZ parallele alle tangenti , abbiamo ZEF = MDHZ; onde ZSN = MDHZ; e all' uno e all'altro lato giugnendo la parte comune ZHIKN , avremo SHIK = MDIKN . Osservo pure, ch' a cagione dell' ordinata RQ , divisa per mezzo in G, i triangoli simili GRI, HQG sono uguali: ora , a motivo delle rette GL, GQ parallele alle tangenti, abbiamo LQG = PTCG; dunque GRI = PTCG ; e ad amendue i lati sommando la parte comune GCNKI, avremo RCNK = PTNKI: ma OMT = POD; onde giugnendone la parte comune POMNKI , avremo PTNKI = MDIKN ; però RCNK = MDIKN ; ma egli s'è trovato SHIK = MDIKN ; dunque SHIK = RCNK.

669. PROPOSIZIONE CXXXIII. *Se due linee* AX , AZ (Fig.408.), *seganti la parabola, si tagliano in un punto* A *fuori della stessa, il rettangolo* AX × AQ *della prima* AX *per la sua parte esteriore* AQ *è al rettangolo* AZ × AS *della seconda* AZ *per la sua parte esteriore* AS, *come'l quadro* $\overline{PO}^2$ *della tangente del diametro* PD *della prima è al quadro* $\overline{OM}^2$ *della tangente del diametro* ME *della seconda*.

Prolungo le rette AX , AZ fino al concorso de' diametri in C ed H, e da' punti Q, S, in cui esse tagliano la curva , tiro le rette QL , SE parallele alle tangenti; divisa la retta QX per mezzo in B , ed aggiuntale la retta QA , abbiamo AX × AQ = $\overline{AB}^2$ — $\overline{BQ}^2$ (*N.* 148.) : ora , i triangoli simili BAH , BQL ci danno $\overline{AB}^2$. $\overline{BQ}^2$: : ABH . BQL ; dunque $\overline{AB}^2$ — $\overline{BQ}^2$. $\overline{AB}^2$: : ABH — BQL . ABH, cioè AX × AQ. $\overline{AB}^2$: : AHLQ . ABH, ovvero AX × AQ. AHLQ : : $\overline{AB}^2$. ABH : ma i triangoli simili ABH, OPD ci danno $\overline{AB}^2$. ABH : : $\overline{OP}^2$. OPD ; onde AX × AQ. AHLQ : : $\overline{OP}^2$. OPD, ovvero AX × AQ. $\overline{OP}^2$: : AHLQ. OPD; e con simile discorso troveremo AZ × AS .

$\overline{OM}^2$: : ACES . OMT : ma OPD = OMT (*N. 664.*) , ed AHLQ = ACES (*N.° 666.*) ; però, nell'ultime due proporzioni ritrovate, la ragione AHLQ, OPD è ſimile alla ragione ACES , OMT , e conſeguentemente l'altre due ragioni ſon' uguali ; e noi abbiamo AX × AQ . $\overline{OP}^2$: : AZ × AS . $\overline{OM}^2$, ovvero AX . × AQ. AZ × AS : : $\overline{OP}^2$. $\overline{OM}^2$.

670. PROPOSIZIONE CXXXIV. *Dato l'aſſe* AB (Fig. 409.), *un diametro* PK , *e le lor tangenti* AY, PT *coll' ordinata* PZ , *tirata all'aſſe dal punto del contatto* P, *io dico ; che ſe dal punto* T *tiraſi una ſecante* TS, *che ſeghi la parabola in* R *ed* S, *e l'ordinata* PZ *in* N , *ſarà detta ſecante tagliata armonicamente ne' punti* R , N.

Da' punti R, S tiro le rette MC , BV parallele alla tangente AY, e le rette LE, SH parallele alla tangente TPV ; finalmente dal punto X, in cui la retta SH ſega la curva, tiro XD parallela ad AY. I triangoli ſimili BVT , MQT ci danno BV. MQ : : BT. MT, e a motivo de' triangoli ſimili BST , MRT abbiamo BS. MR : : BT. MT; onde BV. MQ : : BS. MR, e però $\overline{BV}^2$. $\overline{MQ}^2$: : $\overline{BS}^2$. $\overline{MR}^2$: ma i triangoli ſimili BVT , MQT ſono fra lor come i quadri $\overline{BV}^2$, $\overline{MQ}^2$ de' loro lati omologhi BV , MQ, e per la ſteſſa ragione i triangoli ſimili BSH , MRL ſono tra loro come $\overline{BS}^2$, $\overline{MR}^2$; dunque BVT. MQT : : BSH. MRL, ovvero BVT. BSH : : MQT. MRL; ed in conſeguenza BVT, BVT — BSH : : MQT, MQT — MRL, cioè BVT. TVSH : : MQT. TQRL : ma a cagione dell'ordinata al diametro XS, diviſa per mezzo in O, i triangoli ſimili KOS, XDO ſon'uguali, e a motivo delle rette XD, XO parallele alle tangenti il triangolo XDO equivale al parallelogrammo PTHO ; onde KOS = PTHO; e all'una e all'altra parte ſommando 'l trapezoide POSV , avremo KPV = VTHS. Così pure, il triangolo CRE equivale al parallelogrammo PTLE , e levando la parte comune PQRE , avremo CQP = QTLR ; ponendo dunque nella proporzione ſopra ritrovata BVT. TVSH::MQT.TQRL i valori di TVSH, TQRL, avremo BVT . KPV : : MQT . CQP , ovvero BVT . MQT : : KPV , CQP. Ma i triangoli BVT . MQT ſono fra ſe come i qua-

i quadri $\overline{VT}^2$, $\overline{QT}^2$ de' loro lati omologhi, e i triangoli KPV, CQP come $\overline{VP}^2$, $\overline{QP}^2$; però $\overline{VT}^2 . \overline{QT}^2 :: \overline{VP}^2 . \overline{QP}^2$, e quindi VT. QT :: VP. QP, ovvero QT. QP :: VT. VP: ma a cagione delle parallele MR, ZP, BV, la retta TS è divisa nella stessa ragione della retta VT; onde TR. RN :: TS. SN; il che potrebbesi pure dimostrare, quando anche TB fosse un diametro.

671. AVVERTIMENTO. Da questa dedur si possano le seguenti proposizioni. 1°. *Se dato l'asse* AB (Fig.410.), *una tangente* TP *e l'ordinata* PR *dal punto* T *si tira* MN *parallela a* PR, *e due secanti* TV, TZ *equidistanti dall'asse, io dico; che le rette* QZ, XV, *le quali passano pe' punti, in cui le secanti tagliano la curva, passeranno pel punto* R. 2°. *Poste le stesse cose, se da qualsivoglia punto* M *preso sopra* MN *tirasi una retta* MV, *che seghi la curva in* X *ed* V, *e che passi pel punto* R, *ella sarà segata armonicamente ne' punti* X, R, V. 3°. *Poste ancora le stesse cose, se da qualsivoglia punto* P (Fig. 411.) *preso sopra* MN *tiransi due tangenti* PV, PX *alla curva* (*come insegneremo a suo luogo*), *la linea* XV, *tirata da' punti del contatto passerà pel punto* R. 4°. *Finalmente, poste sempre le stesse cose, se prolungasi* RP *in* H (Fig.412.), *e che da qualsivoglia punto* H *preso sopra* PH *si tirino due tangenti* HQ, HZ *alla curva, la retta* ZQ, *tirata da' punti del contatto, passerà pel punto* T.

Tutte queste proposizioni si mostrano nella stessa maniera, che si son dimostrate rispetto al circolo (*N.* 301. 302. 303. ec.); e chi vorrà legger di nuovo quanto abbiam detto nel Capitolo VI. circa la linea divisa armonicamente, potrà quindi senza molta fatica inferire dell'altre proprietà della parabola.

672. PROPOSIZIONE CXXXV. *Se dati due diametri* PB, MV (Fig. 413.) *colle loro tangenti* PT, MD *tirasi all' uno di essi un' ordinata* CA, *e che si prolunghi, finchè incontri in* E *la tangente* DM *dell' altro diametro, il rettangolo* CE × EA *di tutta la* CE *per l' aggiunta* EA *è al quadro* $\overline{EM}^2$ *della parte* EM *della tangente* DM *ch' essa taglia, come 'l quadro* $\overline{PO}^2$ *della tangente del diametro* PB *è al quadrato* $\overline{OM}^2$ *della tangente dell' altro.*

Dal punto A tiro LX parallela alla tangente, ed in conseguenza ragionando come sopra (*N.669.*), ho EG × EA . EDLA :: $\overline{PO}^2$.POD: ora

ora, a motivo delle rette XL, AN parallele alle tangenti, abbiamo NAX = MDLX; dunque levando la parte comune MEAX, avremo ENM = EDLA: ma noi abbiamo ancora POD = MOT (N. 664.); onde ponendo nella nostra proporzione i valori di EDLA e POD, avremo EG × EA. ENM : : $\overline{PO}^2$. MOT, ovvero EG × EA. $\overline{PO}^2$: : ENM. MOT; e 'n vece di quest' ultimi due triangoli simili ponendo i quadrati $\overline{EM}^2$, $\overline{OM}^2$ de' loro lati omologhi, avremo EC × EA. $\overline{PO}^2$: : $\overline{EM}^2$. $\overline{OM}^2$, ovvero EC × EA. $\overline{EM}^2$: : $\overline{PO}^2$. $\overline{OM}^2$.

Se la retta CA (*Fig.* 414.) sega la parabola in un punto A fuori dell'arco parabolico PM compreso fra i diametri, tiro AL parallela alla tangente DM; e dal punto Q, in cui detta parallela sega la parabola, tiro QN parallela all'altra tangente. Così io ho sempre EC × EA. EDLA : : $\overline{PO}^2$. POD : ora, uguali essendo i triangoli simili AVX, NQX, a cagione dell'ordinata AQ divisa per mezzo dal suo diametro MV, ed essendo 'l triangolo NQX uguale al parallelogrammo MDLX, abbiamo AVX = MDLX; e all'uno e all'altro lato aggiugnendo la parte comune MXAE, avremo MVE = EDLA : ma POD = MOD; onde ponendo nella nostra proporzione i valori di EDLA e di POD, avremo EC × EA. MVE : : $\overline{PO}^2$. MOT, ovvero EC × EA. $\overline{PO}^2$ :: MVE. MOT, e ponendo i quadri de' lati omologhi di questi due ultimi triangoli, avremo EC × EA. $\overline{PO}^2$: : $\overline{ME}^2$. $\overline{OM}^2$, ovvero EC × EA. $\overline{ME}^2$: : $\overline{PO}^2$. $\overline{OM}^2$.

NOTA. Lo stesso avverrebbe, se l'uno de' diametri fosse l'asse.

673. DIFFINIZIONE. La porzione ABC (*Fig.* 415.) d'una parabola, segata da una retta AC, s'appella *segmento di parabola* e la retta AC n'è la *corda*, o *base*. Qualsivoglia triangolo AEC, ABC, ec. che ha per base la base AC del segmento, e 'l cui vertice è sopra l' arco parabolico ABC, dicesi triangolo *iscritto*, e quello, la cui sommità è al vertice B del diametro BR della base, dicesi triangolo *maggiore*, o *massimo*; poichè, se a questo stesso punto B tirasi la tangente MN, che sarà parallela all' ordinata, o alla base AC, e che fra queste due parallele si tiri la perpendicolare

lare BR, egli è manifesto, che'l punto B è fra tutt' i punti dell' arco ABC il più distante dalla base; e in conseguenza, uguale essendo la base di tutt'i triangoli iscritti, quelli, che non avranno'l vertice in B, saran minori del triangolo ABC, perocchè minore sarà la loro altezza, o distanza dal vertice alla base.

674. PROPOSIZIONE CXXXXVI. *Se dati due segmenti* APC, BME (Fig. 415. 416. 417.) *d'una medesima parabola* ACE *le parti* PR, MV *de' diametri delle lor basi comprese in questi segmenti sono uguali, i triangoli maggiori iscritti in questi stessi segmenti sono altresì uguali.*

O le basi AC, BE de' segmenti si segano nella parabola (*Fig.* 415), o al di fuori in X (*Fig.* 416.), o in un punto della curva (*Fig.* 417.).

S'elle si segano nella parabola (*Fig.* 415.), tiro le rette AP, EM, il che mi dà le metà APR, EMV de' triangoli maggiori iscritti, a cagione di AR = RC, e di EV = VP: così quello, che noi diremo de' triangoli APR, EMV, si dirà anche de' massimi triangoli iscritti. Da' vertici P, M de' diametri tiro le tangenti PO, MO, e la retta PM: così pure, dall'estremità e dal mezzo delle basi tiro le rette BC, AE, RV, l'ultima delle quali è parallela a PM, a motivo delle parallele uguali PR, MV; finalmente dal punto O, in cui le tangenti si segano, e dal mezzo della linea PM, che congiunge i loro punti del contatto, tiro la retta OL, ch'è un diametro (*N.* 662.); e per conseguente OL è parallela ai due diametri, e sega eziandio per mezzo la retta RV parallela a PM. Ora i triangoli simili POM, RXV, per avere uguali le basi PM, RV, sono fra loro uguali, e però RX = PO, VX = MO, $\overline{RX}^2 = \overline{PO}^2$, ed $\overline{VX}^2 = \overline{MO}^2$; donde avviene, che $\overline{RX}^2 . \overline{VX}^2 :: \overline{PO}^2 . \overline{MO}^2$: ma perchè le basi AC, BE de' segmenti si segano in X, noi abbiamo $CX \times AX . BX \times XE :: \overline{PO}^2 . \overline{MO}^2$ (*N.* 668.), ovvero $\overline{CR}^2 - \overline{XR}^2 . \overline{BV}^2 - \overline{XV}^2 :: \overline{PO}^2 . \overline{MO}^2$, per essere le basi AG, BM divise in due egualmente in R ed V, e disugualmente in X; dunque $\overline{CR}^2 - \overline{XR}^2 . \overline{BV}^2 - \overline{XV}^2 :: \overline{RX}^2 . \overline{VX}^2$, ovvero $\overline{CR}^2 - \overline{XR}^2 . XR :: \overline{BV}^2 - \overline{XV}^2 . XV$, e componendo, $\overline{CR}^2 - \overline{XR}^2 + \overline{XR}^2 . \overline{XR}^2 :: \overline{BV}^2 - \overline{XV}^2 + \overline{XV}^2 , \overline{XV}^2$; il che si riduce a $\overline{CR}^2 , \overline{XR}^2 :: \overline{BV}^2 . \overline{XV}^2$, e quindi s'inferisce

CR. XR

BR. XR : : BV. XV, ciò che rende le linee RV, BC parallele: ora CR = AR, e BV = VE; onde AR. XR : : VE. VX, ed in conseguenza parallele sono le linee AE, RV: così le quattro BC, PM, RV, AE sono fra loro parallele, e son segate per mezzo dal diametro OL; il che fa, che tanto 'l parallelogrammo PMVR, quanto i trapezoidi RVEA e PMEA sien tutti divisi per mezzo dallo stesso diametro; dunque da una parte di quest' ultimo trapezoide togliendo 'l parallelogrammo PSIR e 'l trapezoide RILA, e dall' altra il parallelogrammo MSIV = PSIR e 'l trapezoide VILE = RILA, resterà PAR = MVE; e conseguentemente i doppj di detti triangoli, cioè i triangoli maggiori iscritti ne' segmenti APC, BME sono uguali.

Se le basi AC, EB de' segmenti si tagliano al di fuori in X (*Fig.* 416.), tiro le rette CB, PM, RV, AE, e la retta OL pel mezzo S di PM; ed in conseguenza la retta OL, essendo un diametro (*N.* 662.), è parallela agli altri due, e taglia eziandio per mezzo la linea RV uguale e parallela a PM, a motivo delle parallele uguali PR, MV. In oltre, poichè i triangoli simili POM, RXV hanno uguali le basi PM, RV, sono fra loro uguali, ed RX = PO, VX = OM, $\overline{RX}^2 = \overline{PO}^2$, $\overline{XV}^2 = \overline{OM}^2$; e quind' io deduco $\overline{RX}^2 . \overline{XV}^2 : : \overline{PO}^2 . \overline{OM}^2$: ora, le secanti AX, XE mi danno AX × XC. EX × XB : : $\overline{PO}^2 . \overline{MO}^2$ (*N.* 669.), od $\overline{XR}^2 - \overline{CR}^2 . \overline{XV}^2 - \overline{BV}^2 : : \overline{PO}^2 . \overline{MO}^2$, a cagione delle linee AC, BC divise ugualmente in R, V, e dell'aggiunte CX, BX; dunque $\overline{XR}^2 - \overline{CR}^2 . \overline{XV}^2 - \overline{BV}^2 : : \overline{RX}^2 . \overline{XV}^2$, ovvero $\overline{XR}^2 - \overline{CR}^2 . \overline{XR}^2 : : \overline{XV}^2 - \overline{BV}^2 . \overline{XV}^2$, e da ciascun conseguente levando 'l suo antecedente, poi paragonando il residuo al conseguente, avremo $\overline{XR}^2 - \overline{XR}^2 + \overline{CR}^2 . \overline{XR}^2 : : \overline{XV}^2 - \overline{XV}^2 + \overline{BV}^2 . \overline{XV}^2$, il che si riduce ad $\overline{XR}^2 . \overline{CR}^2 :: \overline{XV}^2 . \overline{BV}^2$; però XR. CR :: XV. BV, ed in conseguenza le linee CB, RV son parallele. Ma RC = AR, ed VB = EV; dunque XR. AR. XV. VE, il che rende ancora parallele le rette RV, AE: così le quattro CB, PM, RV, AE son parallele, e divise ciascuna per mezzo dal diametro OL; dal che n'avviene, che 'l parallelogrammo PMVR, e li trapezoidi RVAE e PMAE sono altresì divisi ciascuno per mezzo dallo

dallo ſteſſo diametro. Onde, da una parte di queſt'ultimo ſottraendo PSIR ed RILA, e dall' altra togliendo SMVI = PSIR ed VILE = RILA, reſterà PAR = MVE.

In fine, ſe le baſi AC, BE de'ſegmenti ſi tagliano in un punto della curva (*Fig.*417.), tiro le rette PM, RV, AE fra loro parallele per eſſere PM parallella ad RV, e a motivo di CR. CA :: BV. BE la retta RV è parallela ad AE; però; tirando il diametro OS, e compiendo 'l rimanente come ſopra, troveremo APR = MVE.

675. PROBLEMA. *Data una parabola* ABC (Fig. 418.) *trovarne il ſuo aſſe, il ſuo parametro, e'l ſuo fuoco*.

Tiro più linee parallele AN, QD, ec. le quali dall'una e dall' altra parte terminino alla curva; divido ciaſcuna d'eſſe per mezzo in R, S, ec. e per i punti di diviſione faccio paſſare una linea SH, che ſarà 'l diametro delle parallele: così, ſe queſto diametro è perpendicolare alle ſue ordinate, egli ſarà l'aſſe ricercato; ma ſe non l'è, dal punto H, in cui ei ſega la curva, tiro HG perpendicolare ad HS, e ſegando HG per mezzo in X, alzo la perpendicolare XB, ch'è l'aſſe ricercato; poichè HG aver dee un diametro, che la ſeghi per mezzo, ed egli eſſer dee parallelo al diametro HS: ora verun' altra linea, da XB in fuori, può avere qneſte condizioni. Dunque, ec.

Trovato l'aſſe, tiro in H la retta HT parallela all' ordinate RN, SD, ec. del diametro HS, e per conſeguenza HT ſarà tangente in H; dal punto H tiro HZ perpendicolare ſopra HT, e la ſuperpendicolare XZ equivale alla metà del parametro (*N.*643.); il doppio di queſta retta è dunque 'l parametro dell' aſſe, e prendendo 'l quarto di queſto parametro, e da B portandolo in O, il fuoco ſi è 'l punto O.

Ovvero, faccio in H colla tangente TH l' angolo THO uguale all'angolo EHS, formato da eſſa col diametro HS; e 'l punto O, in cui la retta HO ſega l'aſſe, è 'l fuoco (*N.* 661.), e conſeguentemente BO è 'l quarto del parametro.

O pure in altro modo, dal vertice B dell' aſſe tiro la retta BL perpendicolare all'aſſe; colla linea BV divido per mezzo l'angolo retto XBL, e da V, in cui detta linea ſega la parabola, tiro l'ordinata VM uguale al parametro; poichè, retto eſſendo l'angolo XBL, la ſua metà XBV è di 45 gradi; dunque, nel triangolo rettangolo BMV, l' altro angolo acuto BVM è parimente di 45 gradi, e per conſeguenza detto triangolo è iſoſcele, ed MV = BM;

donde avviene, che $\overline{MV}^2 = \overline{MB}^2 = MB \times MB$: ma chiamando P il parametro, abbiamo per la proprietà della parabola $\overline{MV}^2 = MB \times p$; onde $MB \times p = MB \times MB$; e perciò dividendo per MB, avremo $p = MB$.

O finalmente, cerco una terza proporzionale a qualsivoglia affissa BX e alla sua ordinata XG, e questa terza proporzionale, ch'io chiamo p, sarà 'l parametro; poichè, a motivo di $\div$: BX . XG . p, avremo $\overline{XG}^2 = BX \times p$.

676. DIFFINIZIONE. Se data una parabola ABC terminata da una base AC (*Fig. 419.*) tirasi dal vertice B la tangente MN, e dall'estremità A, C della sua base le rette AM, CN perpendicolari ad MN, il rettangolo AMNC dicesi *Rettangolo circonscritto*; la figura mistilinea AFBECNM chiamasi 'l *Compimento* della parabola, e la figura mistilinea BECN il *Compimento* della semiparabola.

677. PROBLEMA. *Misurare una parabola* ABC (Fig. 419.) *terminata da una base, o doppia ordinata* AC.

Descrivo 'l rettangolo circonscritto AMNC, e li due terzi di esso sono 'l valore della parabola; il che io dimostro in questo modo. Concepisco, che BN sia diviso in infinite parti uguali BH, HL, ec. e che da' punti di divisione alla curva sieno tirate delle rette HR, LV, ec. che saranno gli elementi del semicompimento BVCN; da' punti R, V, ec. tiro l' ordinate SR, TV, ec. così gli elementi HR, LV, ec. del semicompimento saran' uguali all' affisse BS, BT, ec. e le distanze BH, BL, ec. dalle rette HR, LV, ec. al verrice B del semicompimento saranno uguali all' ordinate SR, TV, ec. ma per la proprietà della parabola l'affisse BS, BT, ec. sono fra loro come i quadri dell' ordinate SR, TV, ec. dunque gli elementi HR, SV, ec. saranno fra loro come i quadri delle lor distanze BH, BL, ec. al vertice B.

Ora, per quello si è dimostrato (*N. 499.*), se una piramide è segata da infiniti piani paralleli alla sua base, li quali saranno gli elementi di detta piramide, essi sono fra loro come i quadri delle lor distanze al vertice della piramide; perciò gli elementi del semicompimento BVCN sono fra loro come i piani elementari d' una piramide. Ma la somma de' piani elementari d'una piramide equivale alla base moltiplicata pel terzo della sua distanza al vertice (*N. 504.*); onde la somma degli elementi del semicompimento

to

to BVCN è uguale alla base, o al massimo elemento NC moltiplicato pel terzo della sua distanza NB al vertice B. Ora, NC moltiplicato per NB è'l rettangolo BDCN, ed NC $\times \frac{1}{3}$NB n'è il terzo; però la somma degli elementi del semicompimento, cioè lo stesso semicompimento equivale al terzo del rettangolo BDCN: ma se da questo rettangolo e' levasi 'l semicompimento, il residuo è la semiparabola DBNC; detta semiparabola è dunque uguale ai due terzi del rettangolo BDCN; e siccome noi proveremo nello stesso modo, che l'altra semiparabola equivale ai due terzi del rettangolo BDAM, così ne segue, che l'intera parabola ABC equivale ai due terzi del rettangolo circonscritto AMNC.

678. COROLLARIO I°. Se 'l rettangolo circonscritto è 1, la parabola sarà $\frac{2}{3}$, e'l triangolo ABC, per essere la metà, sarà $\frac{1}{2}$; così, riducendo 'l tutto alla medesima denominazione, queste tre Figure saranno fra loro come $\frac{6}{6}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{3}{6}$, o come *6*, 4, *3*: ora, dalla parabola sottraendo 'l triangolo ABC, il residuo sarà 'l valore de' due segmenti AFBX, BVCZ pres' insieme; dunque 'l rettangolo circonscritto, la parabola, il triangolo iscritto e la somma de' due segmenti sono tra loro come *6*. 4. *3*. 1, e per conseguenza la somma de' due segmenti è l' $\frac{1}{6}$ del rettangolo, l' $\frac{1}{4}$ della parabola, e l' $\frac{1}{3}$ del triangolo; e quindi n'avviene, che 'l segmento BVCZ è altresì l' $\frac{1}{6}$ del rettangolo BNCD, l' $\frac{1}{4}$ della semiparabola BDC, e l' $\frac{1}{3}$ del triangolo BDC.

679. COROLLARIO II. *Un segmento* ABC (Fig. 420.) *di parabola, il cui diametro* BP *è inclinato sopra la base* AC, *è parimente li due terzi del parallelogrammo circonscritto, cioè del parallelogrammo* AMNC, *i cui lati* AM, NC *sono paralleli ed uguali al diametro* BP.

Imperocchè, tirando gli elementi HQ, LV, ec. del semicompimento BNCV paralleli alla base NC dello stesso semicompimento, e l'ordinate QS, TV, ec. gli elementi HQ, LT, ec. saranno uguali all'assisse BS, BT, ec. e le parti BH, BL, ec. segate dagli elementi sopra BN saranno uguali all'ordinate QS, VT, ec. onde gli elementi HQ, LV saranno fra loro come i quadri delle parti BH, BL, ec. ch'essi tagliano: ora, se dal vertice B io abbasso la perpendicolare BK sopra la base CN prolungata, gli elementi essendo prolungati taglieranno detta perpendicolare in E, O, ec. nella medesima ragione, ch'essi segano la retta BN in H, L, ec. e però le distanze BE, BO, ec. dagli elementi al vertice saranno fra loro come le rette BH, BL, ec. tagliate da questi ele-

 menti

menti; dunque i quadri di BE, BO, ec. saranno altresì nella stessa ragione de' quadrati di BH, BL, ec. così gli elementi HQ, LV, ec. saranno fra se come i quadri delle lor distanze BE, BO, ec. al vertice B, e perciò essi saranno 'l terzo del massimo elemento NC moltiplicato per la sua distanza BK al vertice B, come si è dimostrato sopra (*N.* 677.): ma il rettangolo CN × BK equivale al parallelogrammo PBNC d'ugual base ed altezza; onde la somma degli elementi HQ, LV, ec. cioè il semicompimento BNCV è'l terzo del parallelogrammo PBNC, e però il semisegmento PBC è li due terzi di questo parallelogrammo; dal che ne segue ad evidenza, che l'intero segmento ABC è i due terzi del parallelogrammo AMNC.

680. COROLLARIO III. *Due segmenti* ABC, DEF(Fig.421.) *d'una stessa parabola sono uguali, se hanno le porzioni* BP, RE *de' lor diametri, comprese in essi segmenti, uguali fra loro.*

I triangoli maggiori ABC, DEF iscritti in questi segmenti sono uguali (*N.* 674.); onde i parallelogrammi circonscritti, per essere doppj de' triangoli, sono fra se uguali: ora i segmenti sono li due terzi de' loro parallelogrammi (*N.*679.); dunque essi sono uguali.

681. PROBLEMA. *Data una parabola* VHAS (Fig. 422.) *col suo asse* AX, *da un punto* P, *che non è sopra l'asse, tirar due tangenti* PS, PV.

Da P tiro un Diametro PHR segante la parabola in H; tiro in H la tangente HT; prendo l'assissa HR uguale a PH, e da R tirando al diametro PR l'ordinata VS segante la parabola in V ed S, da detti punti tiro le rette SP, PV, che son le tangenti ricercate. Poichè, essendo la retta SP tirata dall'estremità S dell' ordinata RS, e la retta PR essendo divisa per mezzo in H, egli è manifesto, che PR è suttangente, e PS tangente; e per la stessa ragione PV è altresì tangente.

682. COROLLARIO I°. *Da un punto esterior* P *non si possono alla parabola tirar che due tangenti.*

Ciò è ad evidenza palese; poichè, qualunque altra linea, che si tirasse dal punto P, passerebbe o infra i due punti V, S del contatto, o al di fuori: così nel primo caso ella segherebbe la parabola, e nel secondo essa sarebbe interamente fuori della curva, senza ne meno toccarla.

683. COROLLARIO II. *Le due tangenti* PS, PV, *le quali da un punto esterior* P, *che non è sopra l'asse, tirar si possono alla parabola, son necessariamente disuguali.*

Dal

Dal punto H io tiro l'ordinata HM all' asse. Essendo 'l triangolo XHR rettangolo in H, l'angolo HRX è acuto, e 'l suo conseguente HRV ottuso. Ora, i due triangoli PRS, PRV hanno 'l lato PR comune, e 'l lato RS uguale al lato RV; ma l'angolo contenuto PRS è minor dell' angolo contenuto PRV; dunque la base PS è minore della base PV.

684. COROLLARIO III. *Al contrario, le due tangenti* TH, TL, *le quali tirar si possono da un punto* T *preso sopra l'asse, son' uguali.*

Imperciocchè, prendendo l'assissa AM uguale a TA, e tirando la doppia ordinata HL, le due tangenti passeranno per i punti H, L; e poichè i triangoli rettangoli TMH, TML hanno 'l lato TM comune, e 'l lato HM uguale al lato ML, è evidente, che 'l terzo TH equivale al terzo TL.

685. DIFFINIZIONE. Due parabole ABC, *abc* (*Fig.* 423.), le quali abbiano differenti parametri BR, *br*, e sieno terminate dalle basi AC, *ac*, son dette *Simili*, quando iscritta nell'una d'esse qualsivoglia figura AMBNC, si possa nell'altra iscriverne una simile *ambnc*.

686. PROBLEMA. *Data una parabola* ABC (Fig. 423.) *con un' altro parametro* br *descriverne un' altra* abc *simile alla data.*

Descrivasi una parabola, la cui distanza dalla direttrice al fuoco sia uguale alla metà del parametro *br*: ciò fatto, suppongo che la linea dell' assisse sia la retta indefinita *bx*; piglio una quarta proporzionale al parametro BR della data parabola, alla sua altezza PB e al parametro *br*, e portando la stessa sopra *bx* da *b* in *p*, pel punto *p* tiro la base *ac*; e dico, che la parabola *abc*, terminata dalla doppia ordinata, o base *ac*, è simile alla data ABC, terminata dalla doppia ordinata, o base AC.

Imperocchè, sieno nella parabola ABC tirate la doppia ordinata MN, e le corde MB, MA, BN, NC; divido l' altezza *bp* in *t* nella medesima ragione che l' altezza BP lo è in T, e pel punto *t* tirando la doppia ordinata *mn* e poscia le corde *mb*, *ma*, *nb*, *nc*, la figura iscritta *ambnc* è simile all' iscritta AMBNC; e per conseguenza le due parabole son simili: il che io provo in questo modo.

Per la proprietà della parabola, noi abbiamo $\overline{TN}^{2} = TB \times BR$; dunque : : TB . TN . BR, e però $\overline{TB}^{2} . \overline{TN}^{2}$: : TB . BR (*N.*393.):

(*N.* 393.) : similmente nella parabola *abc*, noi troveremo $\overline{tb}^2 . \overline{tn}^2$: : *tb*. *br*: ma TB. *tb* : : BP. *bp*, e BP. *bp* : : BR. *br*; onde TB. *tb* : : BR. *br*, ovvero TB. BR : : *tb*. *br*, e per conseguenza $\overline{TB}^2 . \overline{TN}^2 : : \overline{tb}^2 , \overline{tn}^2$; dal che si deduce TB. TN : : *tb*. *tn*. Così i due triangoli rettangoli BTN, *btn* son simili, e perciò l'intero triangolo MBN è simile all'intero triangolo *mbn*.

Tiro le rette TC, TA, *tc*, *ta*, e proverò come sopra, che PC. PT : : *pc*. *pt*, e ch'in conseguenza il triangolo TPC è simile al triangolo *tpc*; il che rende pure simili i triangoli ATC, *atc*. Finalmente, siccome a motivo de' triangoli simili TPC, *tpc* abbiamo TC. *tc* : : TP. *tp*, e perchè TP. *tp* : : BT. *bt*, avremo TC. *tc* : : BT. *bt*: ma egli s'è già trovato BT. *bt* : : TN. *tn*; dunque TC. *tc* : : TN. *tn*: ora, a cagione degli angoli retti PTN, *ptn*, e degli uguali PTC, *ptc*, gli angoli CTN, *ctn* sono altresì uguali; però i due CTN, *ctn* son simili, perchè i lati TC, *tc*, e TN, *tn*, che comprendono gli stessi angoli, sono proporzionali; e quindi n'avviene essere ancora simili gli altri due triangoli MTA, *mta*. Così, per essere le figure iscritte AMBNC, *ambnc* composte d'un egual numero di triangoli simili ciascuno a ciascuno, son simili fra loro.

687. COROLLARIO I°. *Le parabole simili sono fra loro come i quadri delle lor basi, o de' loro lati omologhi.*

Noi abbiam ritrovato PC. *pc* : : PT. *pt*, e poichè PT. TB : : *pt*. *tb*, avremo componendo PT. PB : : *pt*. *pb*, ovvero PT. *pt* : : PB. *pb*; onde PC. *pc* : : PB. *pb*: ora la semiparabola BPC è i due terzi del rettangolo PC × PB, e l'altra *bpc* li due del rettangolo *pc* × *pb*; e questi due rettangoli, avendo i lati proporzionali, sono fra essi come i quadri de' loro lati omologhi; dunque le due semiparabole, e conseguentemente le due parabole sono fra se come i quadri de' loro lati omologhi.

688. COROLLARIO II. *Tutte le parabole possono esser simili.*

Imperocchè basta prender l'assisse BP, *bp* in egual ragione de' parametri BR, *br*, e quindi per i punti P, *p* tirar le basi AC, *ac*.

Delle

Dell' Elisse considerata sopra un piano fuori del Cono.

689. PROBLEMA. *Costruire un' Elisse.*

Piglio due rette AB, CD (*Fig.* 424.) fra lor disuguali, e con esse io formo un'angolo retto, tal che si seghino per mezzo in O. Preso questo punto per centro, con un raggio uguale alla metà OA della maggiore delle due linee descrivo un circolo AEBH; da amendue le parti prolungo CD fino alla circonferenza del circolo in H ed E; poi, dividendo AB in più parti uguali, alzo delle perpendicolari *n*N, *t*T, che d' ambe le parti terminino alla circonferenza. Ciò fatto, comincio dal semicircolo AEB, e cerco una quarta proporzionale al raggio OE, alla retta OD e alla perpendicolare MN, la quale ritrovata, io lo porto sopra MN da M in R: cerco parimente una quarta proporzionale SV alle due OE, OD, e alla perpendicolare ST; continuo nello stesso modo a cercar sempre delle quarte proporzionali alle due linee OE, OD, e ad alcuna delle perpendicolari del semicircolo AED, e faccio passare una curva ARVDPB per l'estremità delle dette proporzionali. Lo stesso io faccio rispetto al semicircolo AHB, ed ho una curva ADBC, la cui retta AB è un'asse, poichè sega per mezzo tutte le linee *r*R, *u*V, su cui ella è perpendicolare; e la linea CD è l' altro, poichè ancor'essa sega per mezzo tutte le linee parallele ad AB, che dall'una e dall'altra parte terminano alla curva, siccome mostreremo a suo luogo. Or solo resta a far vedere, che questa curva è un' Elisse; il che io così dimostro.

Per la costruzione, noi abbiamo OE . OD : : MN . MR, ed OE . OD : : ST . SV; dunque MN . MR : : ST . SV, ovvero MN . ST : : MR . SV, cioè l'ordinate MR, SV, ec. della curva ADBC sono fra loro come l'ordinate MN, ST, ec. del semicircolo AEB; e conseguentemente, innalzando'l tutto al quadrato, avremo $\overline{MR}^2 . \overline{SV}^2 : : \overline{MN}^2 . \overline{ST}^2$: ma, per la proprietà del circolo, $\overline{MN}^2 = AM \times MB$, ed $\overline{ST}^2 = AS \times SB$; onde $\overline{MR}^2 . \overline{SV}^2 : : AM \times MB . AS \times SB$; cioè i quadri dell'ordinate MR, SV ec. della curva ADBC sono fra loro come i rettangoli AM × MB, AS × SB, ec. delle parti dell' asse AB, ch' esse tagliano; e per conseguente questa curva è un Elisse (*N.* 632.).

690. COROLLARIO I°. *Il quadro di qualsivoglia ordinata* MR *all'*

all'asse maggiore, o al grand'asse AB *è al rettangolo* AM × MB *delle parti dell'asse, ch'essa taglia, come'l quadro dell'asse minore, o del picciolo asse* CD *è al quadro del maggiore* AB.

Ordinate essendo al grand' asse le rette MR, OD, abbiamo $\overline{MR}^2 . \overline{OD}^2 :: AM \times MB . AO \times OB$ (*N. 689.*), ovvero $\overline{MR}^2 . AM \times MB :: \overline{OD}^2 . AO \times OB$: ma a cagione di AO $=$ OB noi abbiamo $AO \times OB = \overline{AO}^2$; dunque $\overline{MR}^2 . AM \times MB :: \overline{OD}^2 . \overline{AO}^2$: ora, essendo OD il semiasse minore, ed AO il maggiore, i quadrati $\overline{OD}^2$, $\overline{AO}^2$ di questa metà sono fra se come i quadri de' loro tutti CD, AO; onde 'l quadro dell' ordinata MR è al rettangolo AM × MB, come'l quadro dell' asse minor CD al quadrato dell'asse maggiore AB.

691. DIFFINIZIONE. Se pigliasi una terza proporzionale al grand'asse AB e al piccolo CD, ella si dice *Parametro* del grand' asse; e se prendesi una terza proporzionale all' asse minore CD e al maggiore AB, ella si chiama *Parametro* del picciolo asse.

692. COROLLARIO II. *Il quadro di qualsivoglia ordinata* MR *al grand' asse è al rettangolo* AM × MB *delle parti dell'asse, ch' essa taglia, come'l parametro del grand'asse* AB *è a questo stesso asse.*

Chiamo p il parametro dell'asse maggiore, ed ho $:: AB. CD. p$ (*N. 691.*); dunque $\overline{AB}^2 . \overline{CD}^2 :: AB . p$, ovvero $\overline{CD}^2 . \overline{AB}^2 :: p . AB$. Ora $\overline{MR}^2 . AM \times MB :: \overline{CD}^2 . \overline{AB}^2$ (*N.690.*); onde $\overline{MR}^2 . AM \times MB :: p . AB$.

693. COROLLARIO III. *Se sopra l'una dell'estremità* A *del grand'asse* AB (Fig. 425.) *s'alza una perpendicolare* AX *uguale al parametro di detto asse, e che dall'estremità* X *della stessa tirisi una retta* XB *all'altra estremità* B *dell' asse maggiore, la quale seghi tutte l'ordinate le une al di fuori, e l'altre al di dentro dell' Elisse, dico; che'l quadro di qualsivoglia ordinata* MR *equivale al rettangolo dell'assissa* AM × MV, *cioè per la linea* MV *perpendicolare sopra l'asse maggiore al punto* M, *e contenuta fra l' asse maggiore, e la retta* XB.

Noi abbiamo $\overline{MR}^2 . AM \times MB :: AX . AB$ (*N. 692.*): ora, a cagione de' triangoli simili VMB, XAB, abbiamo VM . MB

MB : : AX. AB, e moltiplicando i due primi termini di queſta proporzione per la medeſima grandezza AM, avremo VM × AM. AM × MB : : AX. AB; dunque VM × AM. AM × MB : : $\overline{MR}^2$. AM × MB: ma i due conſeguenti di queſta proporzione ſon' uguali; onde VM × AM = $\overline{MR}^2$.

694. AVVERTIMENTO. Nella parabola, il quadro d' un' ordinata è ſempre uguale al rettangolo della ſua aſſiſſa pel parametro; nell' eliſſe, il quadro dell' ordinata al grand' aſſe è ſempre uguale al rettangolo della ſua aſſiſſa AM per una linea MV minore del parametro di detto aſſe; e nell' iperbola (ſiccome moſtreremo a ſuo luogo), il quadro d' un' ordinata ad un' aſſe è maggiore del rettangolo dell' aſſiſſa per lo parametro del medeſimo aſſe. Or' ecco donde traſſero l' origine loro i nomi di *Parabola*, d' *Eliſſe*, ed *Iperbola*; imperocchè Parabola appreſſo i Greci ſignifica *Uguaglianza*, Eliſſe ſignifica *Difetto*, ed Iperbola *Ecceſſo*.

695. COROLLARIO IV. *L' ordinate* SV, XP (Fig. 424.) *al grand' aſſe* AB, *equidiſtante dal centro* O, *ſon' uguali*.

Per la generazione dell' Eliſſe noi abbiamo SV. XP : : ST. XZ (*N. 689.*) : ora, nel circolo AEBH, le corde *t*T, *z*Z equidiſtanti dal centro ſon' uguali; dunque le loro metà ST, XZ ſono altresì uguali, ed in conſeguenza SV = XP.

696. COROLLARIO V. *Tutte le linee, come* RZ (Fig.426.), *le quali paſſano pel centro* O *d' un' Eliſſe, e che dall' una e dall' altra parte terminano alla curva, ſon ſegate per mezzo nel centro* O.

Dall' uno de' punti R, in cui la retta RZ ſega la curva, tiro l' ordinata RM; ſopra l' aſſe piglio la parte OX = OM, e da X tiro la retta XZ parallela ad MR, ſenza curarmi ſe 'l punto Z, in cui ella ſega RZ, ſia, o non ſia ſopra la curva. I triangoli ſimili MOR, XOZ, avendo 'l lato MO uguale al lato OX, ſono perfettamente uguali; e perciò RO = OZ, ed MR = ZX : ora le rette MR, ZX ſono equidiſtanti dal centro; dunque, poichè MR è un' ordinata al grand' aſſe, la retta ZX eſſer dee parimente un' ordinata al medeſimo (*N. 695.*); e però il punto Z, in cui eſſa taglia ZR, trovaſi ſopra l' Eliſſe, e ZR è ſegata per mezzo in O.

697. COROLLARIO VI. *Qualunque linea, come* RP (Fig.427.), *parallela all' aſſe maggiore* AB, *e che dall' una e dall' altra parte termina alla curva, è ſegata per mezzo in* T *dall' aſſe minore* CD.

Da' punti R, P, in cui RP sega la curva, tiro l'ordinate MR, PX, le quali, parallele essendo fra le parallele MX, RP, sono per conseguenza fra se uguali; così, uguali sono le loro distanze MO, OX al centro O (*N. 695.*) : ma a cagione delle parallele MR, OD, XP, uguali sono le parallele MO, RT, non meno che le due OX, TP; dunque, a motivo di $MO = OX$, avremo $RT = TP$.

698. COROLLARIO VII. *Il quadro d'un' ordinata* RT *all' asse minore* CD *è al rettangolo delle parti* CT, TD *di detto asse, ch' ella taglia, come 'l quadro dell' asse maggiore* AB *a quello dell' asse minore* CD.

Da R tiro l'ordinata RM all' asse maggiore, ed ho $\overline{MR}^2 . AM \times MB :: \overline{OD}^2 , \overline{AO}^2$ (*N. 690.*): ma essendo AB diviso ugualmente in O, e disugualmente in M, abbiamo $AM \times MB = \overline{AO}^2 - \overline{MO}^2$, ovvero $AM \times MB = \overline{AO}^2 - \overline{RT}^2$, a cagione di $MO = RT$, e similmente a motivo di $MR = OT$ abbiamo $\overline{MR}^2 = \overline{OT}^2$; onde ponendo nella nostra proporzione i valori di $\overline{MR}^2$ ed $AM \times MB$, avremo $\overline{OT}^2 . \overline{AO}^2 - \overline{RT}^2 :: \overline{OD}^2 . \overline{AO}^2$, ovvero $\overline{OD}^2 . \overline{OT}^2 :: \overline{AO}^2 . \overline{AO}^2 - \overline{RT}^2$, e per conseguenza $\overline{OD}^2 . \overline{OD}^2 - \overline{OT}^2 :: \overline{AO}^2 . \overline{AO}^2 - \overline{AO}^2 + \overline{RT}^2$; il che riducesi a $\overline{OD}^2 . \overline{OD}^2 - \overline{OT}^2 :: \overline{AO}^2 . \overline{RT}^2$, od $\overline{RT}^2 . \overline{OD}^2 - \overline{OT}^2 :: \overline{AO}^2 . \overline{OD}^2$; e siccome, a cagione dell' asse CD diviso ugualmente in O e disugualmente in T, abbiamo $\overline{OD}^2 - \overline{OT}^2 = CT \times TD$, avremo in fine $\overline{RT}^2 . CT \times TD :: \overline{AO}^2 . \overline{CO}^2$; cioè 'l quadro dell' ordinata RT all' asse minore è al rettangolo $CT \times TD$, come 'l quadrato del semiasse maggiore a quello del minore, o come 'l quadro dell' asse maggiore al quadro del minore.

699. COROLLARIO VIII. *Dunque i quadri dell' ordinate all' asse minore sono fra loro come i rettangoli delle parti di detto asse, ch' essi tagliano.*

Sieno le due ordinate RT, EF; noi dunque avremo $\overline{RT}^2 . CT$

$\times$ TD

$\times$ TD : : $\overline{AO}^2 . \overline{OD}^2$, ed $\overline{EF}^2$. CF $\times$ FD : : $\overline{AO}^2 . \overline{OD}^2$; onde $\overline{RT}^2$. CT $\times$ TD :: $\overline{EF}^2$.CF $\times$ FD, ovvero $\overline{RT}^2 . \overline{EF}^2$ :: CT $\times$ TD. CF $\times$ FD.

700. COROLLARIO IX. *Il quadro d'un' ordinata* RT *all'asse minore è dunque al rettangolo corrispondente* CT $\times$ TD, *come'l parametro del picciolo asse è allo stesso picciolo asse.*

Ciò dimostrasi, come s' è fatto rispetto all' asse maggiore (*N. 692.*).

701. COROLLARIO X. *Se sopra l' una dell' estremità* D *dell' asse minore* (Fig. 428.) *s'alza una perpendicolare* DX *uguale al suo parametro, e che dal punto* X *all' altra estremità* C *tirisi la retta* CX, *il quadro di qualsivoglia ordinata* TP *all' asse minore equivale al prodotto dell' assissa* TD $\times$ TH.

Ciò dimostrasi nello stesso modo che s'è fatto rispetto al grand' asse (*N. 693.*).

702. COROLLARIO XI. *Se intorno l'asse minore* CD *descrivesi un circolo* CXD (Fig. 429.), *ei sarà interamente nell'Elisse.*

Poichè, tirando all'asse minore l'ordinata RT segante il circolo in X, avremo $\overline{RT}^2$. CT $\times$ TD : : $\overline{AO}^2 . \overline{OD}^2$. Ora, per la proprietà del circolo, CT $\times$ TD $=$ $\overline{XT}^2$; dunque $\overline{RT}^2 . \overline{XT}^2$: : $\overline{AO}^2 . \overline{OD}^2$: ma $\overline{AO}^2$ è maggiore di $\overline{OD}^2$; perciò $\overline{RT}^2$ è altresì maggiore di $\overline{XT}^2$; così'l punto X del circolo è nell'elisse; e siccome lo stesso avverrà rispetto a tutte l'ordinate dell'elisse e del circolo CXD, ne segue, che detto circolo è iscritto nell'elisse.

703. COROLLARIO XII. *L'Elisse è media proporzionale fra'l circolo circonscritto* AEBH, *e l'iscritto* CXD (*Fig. 429.*).

Per la natura dell' elisse, qualunque ordinata MS del circolo circonscritto AEBH è all' ordinata corrispondente MN dell'elisse, come'l raggio OE, o la metà OA dell' asse maggiore è alla metà del minore; donde ne segue, che la somma dell' ordinate del circolo circonscritto, ovvero il circolo circonscritto è alla somma dell' ordinate dell'elisse, o all'elisse, come la metà del grand' asse è alla metà del picciolo, o come l'asse maggiore al minore: così noi abbiamo AEBH. ADBC : : AB. CD. Ora, siccome $\overline{RT}^2 . \overline{XT}^2$: : $\overline{AO}^2 . \overline{OD}^2$ (*N. 699.*), il che ci dà RT. XT :: AO. OD,

 egli

egli è manifesto, che la somma dell' ordinate all' asse minore dell' elisse, cioè l' elisse è alla stessa somma dell'ordinate del circolo iscritto, cioè al circolo iscritto, come AO a OD, o come AB. CD ; e conseguentemente ADBC. CXDV : : AB. CD: ma AEBH . ADBC : : AB . CD ; dunque AEBH . ADBC : : ADBC . CXDV.

704. COROLLARIO XIII. *L'ordinate* MR, SV, *ec.*(Fig.430.) *d' un quarto d' Elisse* AOD *van diminuendo, a misura che s' avvicinano al vertice* A *dell' asse maggiore ; e se dall' ordinate* MN , ST, *ec. del quarto di circolo circonscritto* AOE *si tolgono l' ordinate* MN, SV, *ec. i residui* RN, VT, *ec. andran pure diminuendo, a misura che s' avvicineranno ad* A , *e saran fra loro come l' ordinate* MR , SV. *ec.*

Per la natura dell' elisse, MR. SV : : MN. ST: ma nel circolo AEBH, la corda *n*N, essendo più distante dal centro O di quello sia la corda *t*T, è minore di *t*T; dunque la sua metà MN è altresì minore della metà ST di *t*T , e per conseguente MR è pur minore di SV. Ora , poichè abbiamo MR . SV : : MN . ST , ovvero MR. MN : : SV. ST, avremo eziandio MR. MN — MR : : SV . ST — SV , cioè MR . RN : : SV . VT ; e perciò MR. SV : : RN. VT : ma MR è minore di SV ; onde RN è minore di VT.

705. COROLLARIO XIV. *Fra tutte le linee* RO, VO, *ec* (Fig. 430.) , *che da' punti d' un quarto* AD *di circonferenza d' Elisse tirar si possono al centro* O, *quelle , che col grand' asse* AB *formano un' angolo minore, e ch' in conseguenza re sono più vicine , come* RO, *son maggiori di quelle, che con detto asse formano un' angolo maggiore, e che ne sono più distanti , come* VO.

Da' punti R, V tiro l' ordinate RM , SV all' asse maggiore , e le prolungo fino alla circonferenza del circolo circonscritto in N , e T; da' punti N, T io tiro al centro le rette NO , TO , che per essere raggi del medesimo circolo son' uguali : così $\overline{NO}^2 = \overline{TO}^2$. Ma il triangolo rettangolo NMO ci dà $\overline{NO}^2 = \overline{MO}^2 + \overline{MN}^2$, e perchè MN è diviso in due parti in R , abbiamo $\overline{MN}^2 = \overline{MR}^2 + 2MR \times RN + \overline{RN}^2$; onde $\overline{NO}^2 = \overline{MO}^2 + \overline{MR}^2 + 2MR \times RN + RN$: così pure , il triangolo rettangolo TOS ci dà $\overline{TO}^2 = \overline{SO}^2 + \overline{ST}^2$, e poichè ST è diviso in due parti in V , abbiamo

biamo $\overline{ST}^2 = \overline{SV}^2 + 2SV \times VT + \overline{VT}^2$; e perciò $\overline{TO}^2 = \overline{SO}^2 + \overline{SV}^2 + 2SV \times VT + \overline{VT}^2$. Ora il triangolo rettangolo RMO ci dà $\overline{RO}^2 = \overline{MO}^2 + \overline{MR}^2$; dunque ciò che manca al quadrato $\overline{RO}^2$, perchè sia uguale al quadro $\overline{NO}^2$, è $2MR \times RN + \overline{RN}^2$: similmente, il triangolo VSO ci dà $\overline{VO}^2 = \overline{SO}^2 + \overline{SV}^2$, e per conseguente quello che manca al quadro $\overline{VO}^2$, perchè sia uguale al quadrato $\overline{TO}^2$, è $2SV \times VT + \overline{VT}^2$: ma MR è minore di SV, ed RN minor di VT (*N.* 704.); però il difetto $2MR \times RN + \overline{RN}^2$ è minore del difetto $2SV \times VT + \overline{VT}^2$. Così egli manca meno ad $\overline{RO}^2$, perchè sia uguale ad $\overline{NO}^2$, di quello manchi ad $\overline{VO}^2$, perchè sia uguale a $\overline{TO}^2$, od $\overline{NO}^2$; ed in conseguenza $\overline{RO}^2$ è maggiore di $\overline{VO}^2$, ed RO di VO.

706. COROLLARIO XV. *Dunque fra tutte le linee* RH, VL (Fig. 430.), *che passan pel centro* O, *e che d'ambe le parti terminano alla cura, le maggiori son quelle, che coll' asse maggiore formano angoli minori.*

Abbiam veduto, che RO è maggior di VO: ora le rette RH, VL, essendo segate per mezzo nel centro O (*N. 696.*), son doppie di RO, VO; dunque RH è altresì maggiore di VL.

707. COROLLARIO XVI. *Se dal centro* O *d' un' Elisse* (Fig. 431.) *con un raggio* OH, *maggior del semiasse minore* OD *e minor del semiasse maggiore* OA, *descrivesi un circolo, ei segherà l' Elisse in quattro punti* M, N, S, R, *per cui all' asse maggiore tirar si possono due doppie ordinate* MN, RS *fra loro uguali, e due altre* MR, NS *al minore altresì uguali fra loro.*

1°. E' manifesto, che questo circolo dee segar l'Elisse; poichè, pigliando sopra 'l grand' asse la parte TO uguale al raggio HO, la circonferenza del circolo passerà pel punto T, e però ella non potrà da H pervenire al punto T, senza segar' il quarto d' Elisse AC.

2°. Detto circolo dee segar l' Elisse in quattro punti; imperocchè, siccome 'l punto H non può descrivere il quarto di circonferenza HT senza tagliar' il quarto AC dell' Elisse, così egli non può

può nè meno descriver l' altro quarto di circonferenza TE senza segare l'altro quarto di Elisse AD; e lo stesso n'avverrà degli altri due quarti DB, CB.

3°. Descrivendosi dal punto H il quarto di circonferenza HT, ei non può segare il quarto d'Elisse AC che in un sol punto M; imperocchè, se lo segasse anche in un' altro K, tirando da' punti M, K delle rette al centro, le linee MO, KO, essendo raggi del medesimo circolo, sarebbero uguali; e in conseguenza da'due diversi punti M, K d'un quarto d'Elisse AC si potrebbono al centro O tirar due linee uguali MO, KO, il ch'è impossibile; perocchè la più vicina KO all' asse AB è sempre maggiore dell' altra MO (*N.* 705.): per la stessa ragione, dal punto H descrivendosi'l quarto di circonferenza TE, ei non può segare il quarto d'Elisse AD ch'in un sol punto N; e ciò dicasi ancora degli altri quarti DB, CB d'elisse; dunque'l circolo non può segare l'elisse ch' in quattro punti.

4°. Essendo 'l punto T del quarto di circonferenza HMT il più elevato, cioè'l più distante dal diametro HE, se dal punto M, in cui questo quarto di circonferenza sega'l quarto d' Elisse AC, io tiro una retta MN parallela al diametro HE, ella segherà il circolo in un'altro punto, p. e. in N, e farà una corda segata per mezzo in P dal raggio OT perpendicolare al diametro HE; così noi avremo $MN = 2MP$: ma essendo MP ordinata al grand'asse AO, la doppia ordinata condotta dallo stesso punto M dee parimente esser 2MP; ond'essa equivarrà ad MN; e per conseguente il punto N, in cui'l circolo vien segato dalla corda MN, è lo stesso del punto N, in cui la doppia ordinata all'asse maggiore sega'l quarto d' Elisse AP.

Si proverà nella stessa maniera 1°. che la linea, la quale congiugne i punti N, S, è una doppia ordinata all' asse minore. 2°. Che quella, la quale congiugne i punti S, R, è una doppia ordinata all' asse maggiore. 3°. Finalmente, che quella, la quale congiugne i punti R, M, è una doppia ordinata all' asse minore: così, a motivo delle parallele MN, RS, ed NS, MR, la figura MNRS sarà un parallelogrammo rettangolo; e perciò le due doppie ordinate MN, RS non meno che le due NS, MR all' asse minore saranno uguali.

708. PROBLEMA. *Da un punto R preso sopra un'Elisse* ADBC (Fig. 432.) *tirar'una tangente alla curva.*

Da R tiro un'ordinata all'asse maggiore AB; e cercando una

terza

terza proporzionale OT alla distanza OM dal centro all' ordinata, e al semiasse maggiore OA, tiro per l'estremità T di questa proporzionale e pel dato punto R la retta TRY, ch'è la tangente ricercata; il che provo in questo modo.

Intorno l'asse maggiore descrivo il circolo AEBH, che sarà circonscritto all'Elisse; prolungo l'ordinata MR, finchè seghi la circonferenza del circolo in N, e da N tirando pel punto T la retta NT, ella toccherà il circolo in N, a cagione di :: OM. OA. OT (*N.* 292.). Sopra l'asse io piglio qualsivoglia altro punto S, da cui tiro una retta SX parallela ad MN, e che seghi la tangente TN in X, la circonferenza del circolo in Z, la retta TR in L, e l'Elisse in V. I triangoli simili MNT, SXT ci danno MN. SX :: MT. ST, e a motivo de' triangoli simili MRT, SLT, abbiamo MR. SL :: MT. ST; dunque MN. SX :: MR. SL, ovvero MN. MR :: SX. SL: ma per la natura dell' Elisse, MN. MR :: SZ. SV; perciò SX. SL :: SZ. SV. Ed essendo TN tangente del circolo in N, la retta SX è maggiore dell'ordinata SZ di detto circolo; onde SL esser dee maggiore di SV, e conseguentemente il punto L della retta TY dee esser fuori dell' Elisse; e siccome lo stesso egli avverrà in qualunque parte dell'asse si pigli 'l punto S, fuorchè in M, ne segue, che TRY non tocca l'Elisse se non in R.

NOTA. Che se sopra l' estremità A, B del grand' asse s' alzan delle perpendicolari, elle saranno tangenti dell'Elisse, per essere tangenti del circolo circonscritto, sul cui diametro esse saranno perpendicolari: similmente, le perpendicolari innalzate sopra l'estremità dell'asse minore saran tangenti, poichè l'asse minor' è la più grande di tutte le doppie ordinate all'asse maggiore.

709. COROLLARIO I°. *Se tirata una tangente* TR(Fig. 433.) *ad un Elisse, ella si prolunga, finchè seghi in* Y *l'asse minore* CD, *e che dal punto del contatto tirisi l' ordinata* RQ *all' asse minore, s'avrà* :: OQ. OD. OY.

Intorno al picciolo asse io descrivo 'l circolo CHDF, il quale sarà iscritto nell'Elisse, e dal punto E, in cui detto circolo sega l' ordinata QR, tirando la retta EY, ella sarà tangente del circolo; imperocchè, da qualsivoglia altro punto P preso sopra l' asse minore tirando parallela a QR la retta PM, che seghi la tangente TY in M, l'elisse in N, la retta YE prolungata in S, e 'l circolo in X, i triangoli simili PMY, QRY ci danno PM. QR :: PY. QY; e a motivo de' triangoli simili PSY, QEY avremo PS. QE :: PY. QY; dunque PM. QR :: PS. QE, ovvero

PM.

PM . PS : : QR . QE : ma per la natura dell' Elisse, PN . PX : : QR . QE; onde PM . PS : : PN . PX : ora, essendo TR tangente dell' Elisse in R, la retta PM è maggiore dell' ordinata PN; dunque la retta PS è altresì maggiore di PX, e però il punto S della retta YES è fuori del circolo CHDF; quindi, siccome lo stesso egli avverrà dovunque si pigli 'l punto P, eccettuato in Q, ne segue, che la retta YE è tangente del circolo in E, e che in conseguenza dobbiamo avere : : OQ. OD . OY (*N.* 292.).

Dal che ne nasce, che dato un punto R sopra un' Elisse (*Fig.* 432. 433.) egli è indifferente tirar l'ordinata MR al grand' asse (*Fig.* 432.), o pure l'ordinata RQ al picciolo (*Fig.*433.): imperocchè nel primo caso, facendo : : OM . OA . OT, il punto, da cui si dovrà tirar la tangente, sarà T; e nel secondo, facendo : : OQ. OD. OY, il punto, da cui dovrà esser tirata la tangente, sarà Y; e detta tangente nell' uno e nell' altro caso sarà sempre la stessa.

710. COROLLARIO II. *Tutte le tangenti, che tirar si possono da ciascun punto della curva elittica, sono fra se inclinate, e taglìansi fra i loro punti del contatto.*

Se dall'una e dall' altra parte dell' asse vengon tirate le tangenti TP, VQ (*Fig.* 434.), è manifesto, ch' essendo queste linee inclinate sopra detto asse, elle lo sono anche fra loro, e debbon segarsi in un punto R fra i punti del contatto. Lo stesso avverrebbe, se le tangenti fossero tirate da ambe le parti dell' asse minore.

Ma se le tangenti TP, VQ (*Fig.* 435.) son tirate da due punti T, V dalla medesima parte dell' asse, conduco l'ordinate TM, VN: così, rispetto alla tangente TP, noi abbiamo : : OM . OA . OP, il che ci dà $OM \times OP = \overline{OA}^2$; e rispetto alla seconda, abbiamo : : ON . OA . OQ, ed $ON \times OQ = \overline{OA}^2$; dunque $OM \times OP = ON \times OQ$; dal che io deduco OM . ON : : OQ. OP: ora OM è minore di ON; onde OQ è minore di OP, cioè 'l punto P, in cui la tangente TP la più distante dall' asse sega il detto asse, è più lontano dal vertice A che 'l punto Q, in cui la tangente VQ sega l'asse. Non può dunque la tangente TP andar' a terminare al punto P, senza segar la tangente QVS : ma ella non può segarla al punto del contatto V, poichè allora TP toccherebbe la curva in due punti T, V, il ch'è impossibile

le (*N.*708.) ; nè può la ſteſſa ſegarla infra V e Q, perocchè in tal caſo dovrebbe paſſare fra'l punto V del contatto e l'aſſe, ed in conſeguenza non ſarebbe più tangente; però ella dee neceſſariamente ſegarla in qualche punto Z fra T ed V.

711. COROLLARIO III. *Da uno ſteſſo punto non ſi poſſono tirare due tangenti.*

Ciò provaſi, come s'e fatto per la parabola (*N. 646.*).

712. COROLLARIO IV. *Se da un punto* R *tiraſi una tangente* RP (*Fig.* 436.), *e ſe dal punto del contatto* R *al grand' aſſe tiraſi un' ordinata* MR, *avremo* PA. AM : : PB. MB.

Sopra l'aſſe maggiore io deſcrivo'l circolo circonſcritto, e prolungando l'ordinata fino alla circonferenza in N, la retta NP è tangente del circolo (*N.* 708.), e la retta MN è l'ordinata di queſto circolo condotta dal punto del contatto N; però noi abbiamo PA. AM : : PB. MB (*N.* 296.), cioè la ſecante PB, che paſſa pel centro O dell'Eliſſe, è diviſa armonicamente.

713. COROLLARIO V. *Poſte le medeſime coſe del Corollario precedente, ſe dal punto* P (Fig. 437.) *tiraſi una ſecante* PZ, *che non paſſi pel centro dell'eliſſe, e che ſia ſegata dalla curva e dall' ordinata* RM *ne' punti* X, Z, V, *s'avrà ancora* PX. XV : : PZ. VZ.

Deſcrivo'l circolo circonſcritto, e prolungando l'ordinata MR in N, la retta PN è tangente del circolo, ed MN è la ſua ordinata condotta dal punto del contatto.

Da' punti X, Z tiro le rette QE, TH, finchè ſeghino la circonferenza in E, H, e l'aſſe in Q, T; così, per la natura dell' eliſſe, io ho QX. TZ : : QE. TH: da'punti E, P tiro la retta PH, ſenza curarmi s'ella ſeghi TH in H, ovvero in qualche altro punto, ch'io chiamo *y*. I triangoli ſimili PQX, PTZ ci danno QX. TZ : : PQ. PT, e per i triangoli ſimili PQE, PT*y* abbiamo QE. T*y* : : PQ. TP; onde QX. TZ : : QE. T*y*: ma QX. TZ : : QE. TH; però QE. TH : : QE. T*y*, e per conſeguente TH = T*y*, cioè la retta P*y* è ſimile a PH. Ora, PH è una ſecante del circolo diviſa armonicamente dal circolo, e dall'ordinata MN condotta dal punto del contatto N (*N.* 296.); e a cagione delle parallele QE, MN, TH la retta PZ è ſegata in X, V, Z nella ſteſſa ragione della retta PH: dunque PX. XV : : PZ. VZ.

714. COROLLARIO VI. *Ponendo ſempre la tangente* RP (Fig. 438.) *e l' ordinata* RM *condotta dal punto del contatto, ſe tiraſi l'aſſe minore* CD, *s'avrà* PA. PM : : PO. PB.

Deſcrivo'l circolo circonſcritto, prolungo l'ordinata in N, e dal

punto N tiro la tangente PN; così, per rispetto al circolo, PA . PM : : PO. PB (*N.* 294.) : ma queste linee son le stesse rispetto all'elisse; dunque, ec.

715. COROLLARIO VII. *Poste le medesime cose del precedente Corollario, se dall' estremità* A, B *dell' asse s' alzano sopra detto asse delle perpendicolari* AH, BL *fino al concorso della tangente* PRL, *il rettangolo* AH × BL *di queste due perpendicolari equivale al quadro del semiasse* OD.

Prolungo l'asse minore fino al concorso della tangente in E. Simili essendo i triangoli PAH, PMR, POE, PBL, le lor basi AH, MR, OE, BL sono fra se come le loro altezze PA, PM, PO, PB: ma noi abbiamo PA. PM : : PO. PB (*N.* 714.); onde AH. MR : : OE. BL, e perciò AH × BL = MR × OE.

Dal punto R tiro l'ordinata RT al picciolo asse, il che mi dà MR = OT: ora, a motivo della tangente RE, e dell'ordinata RT, condotta dal punto del contatto, abbiamo : : OT, od MR. OD. OE; e però $\overline{OD}^2$ = MR × OE: ma noi abbiam ritrovato AH × BL = MB × OE; dunque AH × BL = $\overline{OD}^2$.

716. COROLLARIO VIII. *Supponendo sempre la tangente* PR (Fig. 439.), *e l'ordinata* RM *all' asse condotta dal punto del contatto* R, *il rettangolo* AM × MB *delle parti dell' asse segate dall' ordinata* RM *equivale al rettangolo* PM × MO *della suttangente* PM *per la distanza* MO *dall' ordinata* RM *al centro* O.

Descrivo 'l circolo circonscritto, e prolungando l'ordinata in N, la retta PN è tangente del circolo in N; onde tirando al centro la retta NO, il triangolo PNO è rettangolo: ora, essendo l'ordinata MN al circolo abbassata dall' angolo retto N di detto triangolo perpendicolarmente alla sua ipotenusa, abbiamo $\overline{MN}^2$ = PM × MO, e per la proprietà del circolo si ha $\overline{MN}^2$ = AM × MB; dunque PM × MO = AM × MB.

717. COROLLARIO IX. *Poste ancora le medesime cose, se dal punto del contatto* R (Fig. 440.) *s' alza una perpendicolare* RS *alla tangente* RP, *detta perpendicolare segherà l'asse maggiore in un punto* S *tra l'ordinata* RM *e 'l centro* O.

La retta NO, tirata dal punto del contatto N del circolo circonscritto al centro O, è perpendicolare alla tangente PN del circolo; e poichè le due linee PR, PN si segano in P, è manifesto,

sto, che la perpendicolare SR a PR, essendo prolungata, sarà obbliqua sopra PN, e formerà sopra PN dalla parte di P un'angolo acuto PXR, a cagione che'l triangolo PRX è rettangolo in R: così RS vie più s'allontanerà da NO; ed in conseguenza segherà il diametro fra l'ordinata MR e'l centro O, in cui va a terminare NO.

NOTA. Che se dal punto R tirasi l'ordinata RT all' asse minore, la perpendicolare RZ segherà quest'asse di là dal centro O rispetto all'ordinata RT; il che non ha bisogno di dimostrazione.

718. COROLLARIO X. *Poste le medesime cose del precedente Corollario; dico, che la superpendicolare* MS (Fig.440.) *è alla distanza* MO *dall'ordinata* MR *al centro* O, *come 'l parametro del grand'asse è allo stesso grand'asse.*

Per la natura dell'elisse noi abbiamo, chiamando P il parametro dell' asse maggiore, $\overline{MR}^2$. AM × MB : : P . AB (*N. 692.*). Ora, a motivo del triangolo rettangolo PRS e della retta RM perpendicolare all'ipotenusa PS, noi abbiamo $\overline{MR}^2 = PM \times MS$, e dall'altra parte, AM × MB = PM × MO (*N. 716.*); onde sostituendo nella nostra proporzione questi valori, avremo PM × MS. PM × MO : : P. AB: ma poichè i rettangoli PM × MS, PM × MO hanno una comun dimensione PM, sono fra se come le lor dimensioni disuguali MS, MO; dunque MS. MO : : P. AB.

NOTA. Si proverà nella stessa maniera, che se dal punto R all'asse minore si tira l'ordinata RT, la superpendicolare TZ è alla distanza TO dall'ordinata al centro, come'l parametro dell'asse minore è al medesimo picciolo asse. Nel resto e'scorgesi facilmente, che quanto s'è detto ne'precedenti Corollarj circa l'asse maggiore si può eziandio riferire all'asse minore, se pur s'eccettua ciò, ch'abbiam fatto osservare nella nota dell'anzidetto Corollario.

719. DIFFINIZIONE. Se data un'Elisse ADBC(*Fig. 441.*) dall'una dell'estremità D dell'asse minore CD con un raggio uguale al semiasse maggiore AO descrivesi un'arco HX, che seghi l'asse maggiore in due punti H, X, questi si chiamano i *Fuochi* dell'Elisse; ed è facile conoscere, che detti fuochi son'equidistanti dal centro O, a cagione de' triangoli rettangoli uguali DHO, DOX.

720. COROLLARIO. *Dall' accennata diffinizione ne risulta*, *che*

che 'l rettangolo AH × HB *delle parti* AH , HB *dell' aſse ſegato dall' uno de' fuochi* H *equivale al quadro della metà* OD *dell' aſse minore*.

Poichè il triangolo rettangolo HOD ci dà $\overline{OD}^2 = \overline{HD}^2 - \overline{HO}^2$, ovvero $\overline{OD}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{HO}^2$, per eſſere HD = AO: ma eſſendo l' aſſe maggiore AB diviſo in due parti uguali in O, e diſuguali in H, abbiamo AH × HB = $\overline{AO}^2 - \overline{HO}^2$; dunque AH × HB = $\overline{OD}^2$, e così ancora AX × XB = $\overline{OD}^2$.

721. PROPOSIZIONE CXXXVII. *Data una tangente* PR (Fig. 442.), *e l' ordinata* RM *al grand' aſse condotta dal punto del contatto* R; *dico, che ſe deſcriveſi 'l circolo circonſcritto, e che da' punti* T, S, *in cui egli ſega la tangente* PRL, *s' alzino delle perpendicolari* TH, SX *alla tangente, elle paſseranno per i fuochi* H, X *dell' Eliſse*.

Poichè la retta TS è corda del circolo circonſcritto, le rette T*t*, SQ, alzate perpendicolarmente all' eſtremità di detta corda, ſon due corde uguali dello ſteſſo circolo circonſcritto (*N.* 265.); e perchè il diametro BA del circolo ſega queſte corde obbliquamente, le parti TH, *t*H della corda T*t* ſon' uguali ciaſcuna a ciaſcuna alle parti SX, XQ della corda SQ (*N.* 266.). Ciò poſto.

Dall' eſtremità A, B dell' eliſſe io tiro le tangenti AN, BL, che ſeghino la tangente PL in N ed L. Simili eſſendo i triangoli rettangoli PBL, PSX, a cagione dell' angolo acuto P ch' è loro comune, ci danno PB. PS : : BL. SX, e a motivo de' triangoli rettangoli ſimili PTH, PAN abbiamo PT. PA : : TH. AN: ora le rette PB, PS, eſſendo ſecanti del circolo, ci danno PB. PS : : PT. PA (*N.* 272.); dunque BL. SX : : TH. AN, ed in conſeguenza BL × AN = SX × TH: ma BL × AN = $\overline{OD}^2$ (*N.* 715.); onde SX × TH = $\overline{OD}^2$, ovvero *t*H × TH = $\overline{OD}^2$, a cagione di *t*H = SX: ora le rette *t*T, AB, eſſendo corde del circolo circonſcritto, che ſi ſegano in H, abbiamo *t*H × TH = AH × HB (*N.* 279.); dunque AH × HB = $\overline{OD}^2$, cioè 'l rettangolo delle parti diſuguali AH, HB del grand' aſſe equivale al quadro della metà OD del picciolo, e però il punto

punto H è l'uno de' fuochi dell' eliffe (*N.* 720.) : proveremo nella fteffa maniera, che 'l punto X è l'altro.

722. COROLLARIO I°. *Se data una tangente* PR (Fig. 443.) *da' due fuochi* H, X *dell' elisse tiransi delle rette* HR, XR *al punto del contatto* R, *uguali sono gli angoli* HRT, XRS *formati dalle stesse rette colla tangente* PS.

Defcrivo 'l circolo circonfcritto, e da' punti T, S, in cui la fua circonferenza fega la tangente PS, alzando delle perpendicolari TH, SX, che paffino per i fuochi H, X (*N.* 721.), i triangoli HRT, XRS fon rettangoli, e i triangoli fimili HTP, XSP ci danno HT. XS : : PT. PS; tiro l'ordinata MR, ch' io prolungo fino alla circonferenza del circolo in N, e tirando NP, ella farà tangente del circolo; dunque la fecante PS, effendo divifa in R dalla ordinata NM condotta dal punto del contatto, ci dà PT. TR : : PS. RS (*N.* 296.), ovvero PT. PS : : TR. RS; onde HT. XS : : TR. RS, e per confeguenza i triangoli rettangoli HTR, XSR fon fimili, e l'angolo HRT equivale all' angolo XRS.

723. COROLLARIO II. *Se da' fuochi* H, X (Fig. 443.) *d' un' elisse tiransi delle rette al punto* R, *in cui una tangente qualunque tocca 'l elisse, la somma di queste due rette* HR, XR *è uguale al grand' asse* AB.

Defcrivo 'l circolo circonfcritto, e dal centro O tiro la retta OS all' uno de' punti S, in cui 'l circolo fega la tangente TS; alzo in S la retta SX perpendicolare alla tangente, la quale paffa pel fuoco X, e prolungo XS fino al concorfo in V della retta HR prolungata.

L'angolo SRV, effendo uguale all' angolo TRH che gli è oppofto al vertice, è per confeguenza uguale all' angolo XRS, ch' equivale all' angolo TRH (*N.* 722.); così i triangoli rettangoli XRS, SRV fon fimili ed uguali a motivo del lato comune RS, e perciò XS = SV: ora, per la diffinizione de' fuochi, fi ha XO = OH; la retta OS è dunque parallela alla retta HV, e i triangoli fimili HXV, OXS ci danno HV. OS : : HX. OX: ma HX è 'l doppio di OX; dunque HV è parimente 'l doppio di OS: ora, a cagione de' triangoli rettangoli fimili ed uguali RXS, RSV, abbiamo XR = RV; onde HV = HR + RV = HR + XR, e però HR + RX è 'l doppio di OS, od OB, cioè HR + RX = AB.

724. AVVERTIMENTO. Siccome non evvi alcun punto R fopra

sopra la curva dell'elisse, a cui non si possa tirare una tangente, così ne segue, che lo stesso non può dirsi, dove le rette HR, RX tirate dal fuoco non sieno similmente eguali all'asse.

Quindi egli puossi agevolmente descrivere un'elisse, di cui sieno dati il grand'asse AB, ed i fuochi H, X; poichè, se prendesi un filo uguale alla lunghezza AB, e che attaccate le sue due estremità ai due fuochi H, X ei si tenga sempre teso con uno stilo, che si farà girare intorno ai due fuochi fino a tanto che ritorni allo stesso punto, da cui era partito, la punta dello stilo descriverà una curva elittica; perocchè in qualsivoglia parte R trovisi questa punta, s'avrà sempre HR + RX = AB.

725. DIFFINIZIONE. Qualunque retta linea, che passa pel centro d'un'Elisse, e che d'ambe le parti termina alla curva, dicesi *Diametro*; potendosi facilmente ritrovare infinite linee parallele, terminate dall'una e dall'altra parte alla curva, le quali saranno segate ciascuna per mezzo da esso diametro, come diremo in altro luogo.

726. PROPOSIZIONE CXXXVIII. *Se dato l'asse maggiore* AB (Fig. 444.) *e un diametro* RS, *da'vertici* A, R *tiransi delle tangenti* AZ, RP, *le quali si seghino in* X, *i triangoli* PXA, ZXR, *formati dalle stesse tangenti coll'asse e col diametro, son'uguali.*

Da R tiro l'ordinata RM al grand'asse AB, ch'è parallela alla tangente AZ, per essere sì l'una che l'altra perpendicolare al predetto asse; e dal punto A tiro la retta AH parallela alla tangente RP. A cagione della tangente RP, e dell'ordinata RM, condotta dal punto del contatto, abbiamo OM. OA :: OA. OP (*N*.708.): ora i triangoli simili OMR, OAZ ci danno OR. OZ :: OM. OA; dunque OR. OZ :: OA. OP; e per conseguenza tirando le rette RA e ZP, queste due linee son parallele, e i triangoli ARP, ARZ, i quali sono fra esse ed hanno la stessa base RA, sono uguali; però dall'uno e dall'altro levando il triangolo RZA, avremo PXA = ZXR.

727. COROLLARIO. *Poste le stesse cose, se dal punto del contatto* R *della tangente* RP *condotta pel vertice del diametro* RS *tirasi l'ordinata* RM *al grand'asse, il triangolo* RPM *formato dalla tangente, dall'ordinata e dal grand'asse equivale al quadrilatero* ZAMR *formato dalla tangente dell'asse, dall'ordinata* RM, *dall'asse, e dal diametro.*

I triangoli PXA, ZXR son'uguali (*N*.726.); però all'uno e all'altro lato sommando la parte comune RXAM, avremo RPM = ZAMR.

NOTA.

NOTA. Questa Proposizione e'l suo Corollario sono di molta importanza per ben comprendere quello che segue.

728. PROPOSIZIONE CXXXIX. *Se dato l' asse maggiore* AB (Fig. 445. 446. 447. 448. 449.) *un diametro* RS, *e le loro tangenti* AZ, RP *condotte da' vertici, tiransi da qualsivoglia punto* E *preso sopra la curva due parallele alle tangenti, il triangolo* EHV *formato da esse e dal grand' asse equivale al trapezoide* AZTV, *formato dalla tangente del grand' asse, e dalla sua parallela* TV *compresa fra l' asse, e'l diametro; e'l triangolo* TEL, *formato dalle due parallele e dal diametro* RS, *equivale al trapezoide* RPHL *formato dalla tangente di detto diametro, e dalla sua parallela compresa fra l' asse e 'l diametro.*

Esamineremo i varj casi, che quì si contengono, cominciando dal triangolo formato dalle due parallele coll'asse AB.

1°. Se 'l punto E, da cui tiransi le parallele TV, HL, è fra l'asse e'l diametro (*Fig.*445.), già sappiamo, che 'l triangolo PRM è uguale al trapezoide ZAMR (*N.* 727.). Ora i triangoli PRM, HEV, essendo simili, sono fra se come i quadri de'loro lati omologhi RM, EV; onde PRM . HEV : : $\overline{RM}^2$. $\overline{EV}^2$: ma per la natura dell' elisse, $\overline{RM}^2$. $\overline{EV}^2$: : AM × MB . AV × VB (*N.* 689.), e a motivo di AB, diviso in due parti uguali in O e in due disuguali in M, abbiamo AM × MB $= \overline{AO}^2 - \overline{MO}^2$, e per la stessa ragione AV × VB $= \overline{AO}^2 - \overline{VO}^2$; dunque PRM . HEV : : $\overline{AO}^2 - \overline{MO}^2$. $\overline{AO}^2 - \overline{VO}^2$, e'n vece de'quadri $\overline{AO}^2$, $\overline{MO}^2$ ed $\overline{VO}^2$ ponendo i triangoli simili AZO, VTO, MRO, che son nella medesima ragione, perchè le rette AO, MO ed VO sono i loro lati omologhi, avremo PRM . HEV : : AZO — MRO. AZO — VTO, cioè PRM . HEV : : AZRM . AZTV: ma PRM = AZRM (*N.* 727.); però HEV = AZTV.

2°. Se 'l punto E, da cui tiransi le parallele (*Fig.*446.), è fra 'l diametro RS e l' asse minore CD, i triangoli simili PRM, HEV ci daran sempre PRM . HEV : : $\overline{RM}^2$. $\overline{EV}^2$, e così noi avremo ancora $\overline{RM}^2$. $\overline{EV}^2$: : $\overline{AO}^2 - \overline{MO}^2$. $\overline{AO}^2 - \overline{VO}^2$: : AZO — MRO. AZO — VTO : : AZRM . AZTV; onde PRM . HEV : : AZRM. AZTV, e perciò HEV = AZTV, a cagione di PRM = AZRM.

Se

3°. Se'l punto E, da cui si tiran le parallele (*Fig.*447.), è al di sotto dell' asse minore CD, la tangente AZ e la sua parallela EV più non formeranno un trapezoide: ma all' altro termine B del grand'asse tirando la tangente Bz, che seghi 'l diametro RS in z, detta tangente colla sua parallela, coll' asse e col diametro formerà il trapezoide VTzB. Ora, i triangoli simili PRM, HEV ci daran sempre PRM. HEV : : $\overrightarrow{RM}$. $\overrightarrow{EV}$, e noi avremo parimente $\overrightarrow{RM}$. $\overrightarrow{EV}$: : $\overrightarrow{AO}$ — $\overrightarrow{MO}$. $\overrightarrow{OB}$ — $\overrightarrow{OV}$: : AZO — MRO. OBz — OVT :: AZRM, VTzB; dunque PRM. HEV :: AZRM. VTzB, e perciò HEV = VTzB, a motivo di PRM = AZRM.

4°. Se 'l punto E (*Fig.*448.) trovasi dall'altro lato dell'asse maggiore, s'avrà sempre PRM. HEV : : $\overrightarrow{AO}$ — $\overrightarrow{MO}$. $\overrightarrow{AO}$ — $\overrightarrow{VO}$: : AZO — MRO. AZO — VTO : : AZRM. AZTV ; dunque PRM. HEV : : AZRM. AZTV, ed in conseguenza HEV = AZTV siccome PRM = AZRM.

5°. Finalmente, se E trovasi sopra'l quarto di elisse DB (*Fig.*449.), dall' altra estremità B dell' asse io tiro la tangente Bz, e trovo ancora PRM. HEV : : $\overrightarrow{RM}$. $\overrightarrow{EV}$: : $\overrightarrow{AO}$ — $\overrightarrow{MO}$. $\overrightarrow{BO}$ — $\overrightarrow{VO}$: : AZO — MRO. BOz — VOT : : AZRM. BVTz ; e per conseguente HEV = BVTz siccome PRM = AZRM. Passiam' ora al secondo triangolo.

1°. Se'l punto E trovasi fra l'asse e'l diametro (*Fig.* 445.), il triangolo formato dalle parallele e dal diametro è TEL: ora PRM = AZRM ; dunque da una parte togliendo 'l triangolo HEV e dall' altra il trapezoide AZTV = HEV, avremo PRIH + EVMI = TVMR ; e levando la parte comune EVMI, resterà PRIH = TERI, e ad amendue le parti giugnendo 'l triangolo RIL, avremo PRLH = TEL.

2°. Se'l punto E trovasi fra 'l diametro RS e l'asse minore CD (*Fig.* 446.), il triangolo formato dalle parallele e dal diametro RS è TEL. Dall'altro punto *e*, in cui la parallela EH sega l' elisse, tiro alla tangente AZ dell' asse la parallela *tu*; il che mi dà H*eu* = AZ*tu*, come s'è veduto. Ora HEV = AZTV ; onde da una parte levando H*eu* e dall' altra AZ*tu*, avremo *eu*EV = *tu*VT, e sottraendo la parte comune *eu*VTL, resterà TEL = *te*L: ma *te*L = RPHL ; dunque TEL = RPHL.

3°. Se 'l punto E trovasi sopra 'l quarto d' elisse CB (*Fig.*447.), dall'

dall'altra estremità B del grand'asse tiro la tangente zp fino al concorso del diametro RS in z, e della tangente PR prolungata in p.

I triangoli rettangoli simili AZO, BzO son' uguali, a motivo di OB = AO, ed uguali sono eziandio i triangoli AZO, PRO, a cagione della parte comune ORXA, e del triangolo PAX uguale al triangolo ZXR (*N.726.*); dunque PRO = BOz, e sommando la parte comune RpBO, avremo PpB = Rpz. Dall'uno e dall'altro lato levo la parte RpBVEL, e resta PRLH + HEV = VBzT + LET: ora HEV, essendo 'l triangolo formato dalle parallele coll'asse, equivale al trapezoide VBzT; onde il triangolo LET, formato dalle parallele col diametro, equivale al trapezoide PRLH.

4°. Se 'l punto E trovasi dall' altro lato del grand'asse sopra 'l quarto d' Elisse AD (*Fig.448.*), dall'altra estremità S del diametro RS tiro la tangente zp, ch'incontri l' asse prolungato in p, e la sua tangente ZA prolungata in z: così noi mostreremo, come nel precedente caso, che pzA = ZzS, e levando la parte comune SzAVEL resterà pSLH + HEV = VAZT + LET. Ora il triangolo HEV, formato dalle parallele e dall' asse, equivale al trapezoide VAZT; onde 'l triangolo LET, formato dalle parallele e dal diametro, è uguale al trapezoide pSHL.

5°. Finalmente, se E trovasi nel quarto d'elisse DB (*Fig.449.*), dall'estremità S, B del diametro e dell'asse tirando le tangenti Sp, Bz, proveremo, che 'l triangolo LET, formato dalle parallele e dal diametro, equivale al trapezoide HLSp, siccome s'è fatto rispetto al triangolo LET (*Fig. 446.*).

729. COROLLARIO. *Qualunque linea* E*e* (Fig.450.), *terminata d'ambe le parti alla curva dell' Elisse, e parallela ad una tangente* RP, *condotta all'estremità d'un diametro* SR, *è divisa per mezzo in* L *dallo stesso diametro, e n' è in conseguenza la doppia ordinata.*

Dall'estremità E, *e* della linea E*e* tiro le rette ET, *et* parallele alla tangente ZA dell'asse, e che seghino 'l diametro in T, *t*: così, parallele essendo le rette *et*, *e*L alle tangenti AZ, RP, il triangolo *et*L equivale al trapezoide RPHL (*N.* 728.), e per la stessa ragione il triangolo ETL = RPHL; onde *et*L = ETL: ora detti triangoli son simili; dunque sono perfettamente uguali, e noi abbiamo *e*L = EL. Lo stesso ancora si dimostrerà, purchè s' osservi ciò ch'è stato detto sopra (*N.728.*), da qualsivoglia punto E dell'elisse la retta E*e* sia tirata parallela ad RP.

730. COROLLARIO II. *I quadri dell' ordinate* ET, IV (Fig. 451.) *a qualsivoglia diametro* RS *sono fra loro come i rettangoli* RT × TS, RV × VS *delle parti del diametro tronche dall' ordinate*.

Prolungo l'ordinate, finchè seghino l'asse in *t*, *u*, e dall' estremità E, I tiro delle rette EL, IH parallele alla tangente dell' asse. I triangoli simili TEL, VIH ci danno $\overline{TE}^2 . \overline{VI}^2 :: TEL . VIH$ (*N.* 392.) : ora, essendo le rette EL, ET parallele alle tangenti dell'asse e del diametro, abbiamo $TEL = RPtT$ (*N.* 728.), e per la stessa ragione $VIH = RPuV$; dunque $\overline{TE}^2 . \overline{VI}^2 :: RPtT . RPuV$: ma $RPtT = RPO - TtO$, ed $RPuV = RPO - VuO$; onde $\overline{TE}^2 . \overline{VI}^2 :: RPO - TtO . RPO - VuO$; e'n vece de' triangoli RPO, T*t*O, V*u*O ponendo i quadrati $\overline{RO}^2$, $\overline{TO}^2$, $\overline{VO}^2$, i quali son nella stessa ragione, perocchè i triangoli essendo simili, sono fra se come i quadri de' loro lati omologhi RO, TO, VO, avremo $\overline{TE}^2 . \overline{VI}^2 :: \overline{RO}^2 - \overline{TO}^2 . \overline{RO}^2 - \overline{VO}^2$. Ora, essendo RS diviso in due ugualmente in O e disugualmente in T, abbiamo $\overline{RO}^2 - \overline{TO}^2 = RT \times TS$; e perciò anche $\overline{RO}^2 - \overline{VO}^2 = RV \times VS$; dunque $\overline{TE}^2 . \overline{VI}^2 :: RT \times TS . RV \times VS$. Lo stesso si dimostrerà, purchè s' osservi ciò ch' è stato detto sopra (*N.* 728.), da qualsivoglia punto dell'elisse sien tirate l' ordinate ET, IV.

731. PROPOSIZIONE CXL. *Dati due diametri* MN, RS (Fig. 452.) *colle tangenti al vertice* MX, RX, *che si segano in* X, *se tirasi la retta* RM, *che congiugne i punti del contatto, e che dal punto* X, *in cui le tangenti si segano, tirisi pel mezzo* L *della retta* RM *la linea* XO, *ella sarà un diametro, e conseguentemente passerà pel centro* O.

A fine di provare, che XO è un diametro, basta far vedere, ch'ella segherà per mezzo tutte le linee parallele ad RM, le quali saranno d'ambe le parti terminate alla curva ; e la dimostrazione non sarà dissimile da quella della parabola (*N.* 662.).

732. AVVERTIMENTO. Mediante questa Proposizione, ciò ch'è stato detto sopra rispetto a un'asse e ad un diametro, può altresì dimostrarsi rispetto a due diametri.

Sieno

Sieno p. e. i diametri MN, RS (*Fig.* 453.) colle lor tangenti MT, RP, che si segano in X: dal vertice M tiro la retta MZ parallela alla tangente RP, ed in conseguenza ordinata al diametro RS (*N.* 729.), e dal vertice R la retta RH ordinata al diametro MN; colla retta TM congiungo i punti del contatto R, M, e segando questa linea per mezzo in L, la retta XL è un diametro (*N.* 731.), e passa pel centro O: ora, essendo RXME un parallelogrammo, ed essendo la sua diagonale RM segata per mezzo in L dalla retta XL, egli è manifesto, che XL prolungata passa per l'angolo E, e che XE è l'altra diagonale. I triangoli simili OEH, OXM ci danno OH. OM : : OE. OX, e a motivo de' triangoli simili OEM, OXR abbiamo OM. OP : : OE. OX; dunque OH. OM : : OM. OP: così pure, i triangoli simili OEZ, OXR ci danno OZ. OR : : OE. OX, e a cagione de' triangoli simili OER, OXT abbiamo OR. OT : : OE. OX, e per conseguenza OZ. OR : : OR. OT; dal che comprendesi, che la linea OP è divisa ne' punti H, M nella stessa ragione che la linea OT lo è ne' punti Z, R, e ch'in conseguenza parallele sono le rette ZH, RM, TP.

Dunque, 1°. Se dato un diametro MN da un punto R vogliamo tirar' una tangente, conviene da detto punto condurre un'ordinata RH al diametro MN, poi cercar' una terza proporzionale OP alle rette OH, OM; e P sarà 'l punto, in cui la tangente tirata da R segherà 'l diametro MN: così la stessa operazione, che si fa rispetto a un Diametro, si fa anche rispetto all'asse (*N.*708.).

Dunque, 2°. I triangoli PXM, TXR, formati dalle tangenti e dai diametri, sono uguali; poichè, a motivo delle parallele TP, RM, i triangoli PRM, TRM, i quali han la base comune RM, son' uguali; e sottraendo 'l triangolo comune RXM, resterà PXM = TXR.

Dunque, 3°. Il triangolo PRH equivale al trapezoide MTRH; imperocchè, uguali essendo i triangoli PXM, TXR, se all'uno e all'altro lato aggiugnesi la parte comune MXRH, s'avrà PRH = MTRH.

Dunque, 4°. Se da qualsivoglia punto E (*Fig.* 454.) preso sopra la curva tiransi delle rette DL, CF parallele alle tangenti, il triangolo LEC, fatto da queste parallele e dal diametro MN, equivale al trapezoide MTFC, fatto dalla tangente MT di questo diametro e dalla sua parallela CF; poichè dal punto R tirando l' ordinata RH al diametro, avremo PRH = MTRH. Ora, simili

eſſendo i triangoli PRH, LEC, abbiamo PRH, LEC :: $\overline{RH}^2 . \overline{CE}^2$ (*N.* 392.), e perchè RH, CE ſon' ordinate al diametro MN, abbiamo $\overline{RH}^2 . \overline{CE}^2$ :: MH × HN . MG × CN :: $\overline{MO}^2 - \overline{HO}^2 . \overline{MC}^2 - \overline{CO}^2$ (*N.* 730.); onde PRH . LEC :: $\overline{MO}^2 - \overline{HO}^2 . \overline{MC}^2 - \overline{CO}^2$; e in vece de'quadri $\overline{MO}^2$, $\overline{HO}^2$, $\overline{CO}^2$ ponendo i triangoli ſimili MTO, CFO, HRO, che ſon nella ſteſſa ragione (*N.* 392.), avremo PRH . LEG :: MTO — HRO, MTO — CFO :: MTRH . MTFG : ma PRH = MTRH; dunque LEC = MTFC.

Così pure, il triangolo FED formato dalle due parallele e dal diametro RS equivale al trapezoide RPLD fatto dalla tangente RP di queſto diametro, e dalla ſua parallela DL. Il che ſi dimoſtrerà nella ſteſſa maniera, tirando da M al diametro RS l' ordinata MZ.

733. PROPOSIZIONE CXLI. *Dati due diametri* MN, RS (Fig. 455.) *colle lor tangenti* MT, RP, *ſe da due punti* Q, V *preſi ſopra la curva tiranſi fra eſſi diametri delle rette* QL, QK, VH, VF *parallele alle tangenti, il trapezoide* ELHV, *formato da due di dette parallele* QL, VH *col diametro* MN *e colla più vicina all' altre due* VF, *equivale al trapezoide* FEQK, *fatto dall altre due parallele* VF, QK *coll' altro diametro* RS *e colla più vicina* QL *all' altre due; e 'l trapezoide* QLHY, *fatto dalle parallele* QL, YH *col diametro* MN *e colla più diſtante* YK *dall' altre due, equivale al trapezoide* FVYK, *formato dall' altre due parallele* VF, YK *col diametro* RS *e colla più diſtante* YH *dalle parallele*.

La dimoſtrazione è la ſteſſa di quella della parabola (*N.* 666. 667.).

734. PROPOSIZIONE CXLII. *Se due linee* HZ, TV (Fig. 456. 457. 458.), *che d' ambe le parti terminano alla curva, ſeganſi nell' Eliſſe, il rettangolo* HL × LZ *delle parti della prima è al rettangolo* TL × LV *delle parti della ſeconda, come 'l quadrato della tangente* MX *al vertice del diametro della prima è al quadro della tangente* RX *al vertice del diametro della ſeconda.*

La dimoſtrazione è la ſteſſa di quella della parabola (*N.* 668.) per i tre caſi rappreſentati dalle figure 456. 457. 458.

735. PROPOSIZIONE CXLIII. *Se due ſecanti* HZ, HV (Fig. 459.)

(Fig. 459.) *partono da uno stesso punto esteriore* H , *il rettangolo della prima* HZ *per la sua parte esteriore* HQ *è al rettangolo della seconda* HV *per la sua parte esteriore* HL , *come 'l quadro della tangente* RX *parallela alla prima è al quadro della tangente* MX *parallela alla seconda*.

La dimostrazione è simile a quella della parabola (*N. 669.*) .

736. PROPOSIZIONE CXLIV. *Se dati due diametri, o semidiametri* MO, RO (Fig. 460. 461.) *colle lor tangenti* MX , RX *tirasi una doppia ordinata* VZ *all'uno de' diametri* RO , *e che si prolunghi fino al concorso della tangente dell'altro diametro in* H, *il rettangolo* HZ × HV *dell'intera linea* HZ *per la parte esteriore* HV *è al quadro della parte* HM, *ch' ella sega sopra la tangente* MX, *come'l quadrato della tangente* RX *del suo diametro è al quadro della tangente* MX *dell'altro*.

La dimostrazione di ciò è simile a quella della parabola (*N.*672.) per i due casi rappresentati dalle figure 460. 461.

737. PROPOSIZIONE CXLV. *Se dati due segmenti* AMB , CRD (Fig. 462. 463. 464.) *le parti* ML, RH *de' loro diametri comprese in detti segmenti sono fra se come i lor diametri, o semidiametri* MO, RO, *i triangoli maggiori iscritti in detti segmenti son' uguali*.

Tiro le rette RD , MB ; il che mi dà dei triangoli RDH , MBL, che sono le metà de' massimi triangoli iscritti ne' segmenti, poichè hanno la loro cima ai vertici R, M de' diametri , e perchè le lor basi DH, BL son le metà delle basi DG , AB de' segmenti: così, quello che noi diremo de' triangoli RDH , MBL , si dovrà altresì intendere de' massimi triangoli iscritti . Ora le basi AB , DC possono segarsi o nell' elisse (*Fig.* 462.), o al di fuori (*Fig.*463.), o sopra la curva (*Fig.* 464.) .

Se le basi AB, CD si segano al di dentro in V (*Fig.* 462.) , tiro le tangenti MR , RX ai vertici de' diametri , o semidiametri MO, RO, la retta RM , che congiugne i punti del contatto , e le rette AC, HL, DB, che passano per l' estremità e per mezzo le basi AB, CD. Sego in due parti uguali la retta RM ; e pel punto X, in cui concorrono le tangenti e 'l mezzo di RM, tiro la retta XF, ch'è un diametro (*N.*731.), e che passa pel centro O.

Ora, per ipotesi, noi abbiamo ML . MO : : RH. RO ; dunque i triangoli ROM, HOL son simili, e le basi RM , HL son parallele; e siccome la base RM del triangolo RMO è segata per mezzo dalla retta XO, che passa pel vertice O , la base HL del trian-

triangolo HOL sarà altresì divisa per mezzo in S dalla stessa retta XO: dall'altra parte, a cagione delle parallele RM, HL e delle tangenti RX, XM parallele alle doppie ordinate DC, AB, simili sono i triangoli RXM, HVL; e poichè la retta XF, la quale sega per mezzo la base RM del triangolo RXM e passa pel vertice X, sega pure per mezzo la base HL del triangolo HVL e fa l'angolo XSH uguale all'angolo XVR, conviene di necessità, che questa retta XF passi ancora pel vertice V del triangolo HVL: così noi abbiamo VL. HV : : XM. RX; onde $\overline{VL}^2 . \overline{HV}^2 :: \overline{XM}^2 . \overline{RX}^2$.

Ora, tagliandosi le basi AB, CD de' segmenti al di dentro dell'elisse, abbiamo $AV \times VB . CV \times VD : : \overline{MX}^2 . \overline{RX}^2$ (*N.*734.); e però $AV \times VB . CV \times VD : : \overline{VL}^2 . \overline{HV}^2$: ma a motivo delle basi AB, CD, divise in due ugualmente in L ed H, e disugualmente in V, abbiamo $AV \times VB = \overline{AL}^2 - \overline{VL}^2$, e $CV \times VD = \overline{CH}^2 - \overline{HV}^2$; dunque $\overline{AL}^2 - \overline{VL}^2 . \overline{CH}^2 - \overline{HV}^2 :: \overline{VL}^2 . \overline{HV}^2$, ovvero $\overline{AL}^2 - \overline{VL}^2 . \overline{VL}^2 : : \overline{CH}^2 - \overline{HV}^2 . \overline{HV}^2$; e componendo, avremo $\overline{AL}^2 - \overline{VL}^2 + \overline{VL}^2 . \overline{VL}^2 :: \overline{CH}^2 - \overline{HV}^2 + \overline{HV}^2 . \overline{HV}^2$, cioè $\overline{AL}^2 . \overline{VL}^2 : : \overline{CH}^2 . \overline{HV}^2$, e però AL. VL : : CH. HV; donde avviene, che le rette HL, AC son parallele. Ora $AL = LB$, e $CH = DH$; dunque LB. VL : : DH. HV: così le rette DB, HL son parallele, ed in conseguenza le quattro AC, RM, HL, DB sono parallele e divise ciascuna per mezzo dalla retta XF: dal che ne segue, che i trapezoidi RMBD, RMLH ed HLBD son parimente divisi ciascuno per mezzo dalla stessa linea XF. Dal trapezoide RMBD levando dunque da una parte i trapezoidi RVSH ed HSFD, e dall'altra i trapezoidi VMLS = RVSH ed LSFB = HSFD, resterà dall'una il triangolo RHD uguale al triangolo MLB dell'altra.

Se le basi AB, CD (*Fig.*463.) si tagliano in T fuori dell'elisse, faccio la stessa costruzione di prima, e mostrerò nel medesimo modo; che le rette RM, HL sono fra lor parallele, e divise per mezzo dal diametro XO; che questo diametro passa pel punto T, e che s'avrà $\overline{TL}^2 . \overline{TH}^2 : : \overline{MX}^2 . \overline{RX}^2$; perocchè i triangoli simili LTH,

LTH, MXR ci danno TL. TH : : MX. RX : ora le feccanti TB, TD ci danno TB × TA. TD × TC : : $\overline{MX}^2$. $\overline{RX}^2$; dunque TB × TA. TB × TC : : $\overline{TL}^2$. $\overline{HT}^2$. Ma TB × TA = $\overline{TL}^2$ — $\overline{AL}^2$, e TD × TC = $\overline{TH}^2$ — $\overline{CH}^2$; onde $\overline{TL}^2$ — $\overline{AL}^2$. $\overline{TH}^2$ — $\overline{CH}^2$: : $\overline{TL}^2$. $\overline{HT}^2$, ovvero $\overline{TL}^2$. $\overline{TL}^2$ — $\overline{AL}^2$: : $\overline{TH}^2$. $\overline{TH}^2$ — $\overline{CH}^2$, e dividendo, $\overline{TL}^2$. $\overline{TL}^2$ — $\overline{TL}^2$ + $\overline{AL}^2$: : $\overline{TH}^2$. $\overline{TH}^2$ — $\overline{TH}^2$ + $\overline{CH}^2$, cioè $\overline{TL}^2$. $\overline{AL}^2$: : $\overline{TH}^2$. $\overline{CH}^2$; e perciò TL. AL : : TH. CH, il che rende le linee HL, CA parallele; e poichè, a motivo di AL = LB e di CH = HD, abbiamo TL. LB : : TH. HD, le linee DB, HL fono altresì parallele: così le quattro CA, RM, HL, DB fon parallele e divife ciafcuna per mezzo dal diametro XF, e in confeguenza li trapezoidi RMDB, RMLH ed HLBD fon parimente divifi ciafcuno in due parti uguali da quefto fteffo diametro. Terminando adunque il rimanente come fopra, troveremo ancora RDH = MBL.

Finalmente, fe le bafi AB, CD (*Fig.* 464.) fi tagliano fopra la curva, faccio la medefima coftruzione, e le rette RM, HL fon parallele e divife ciafcuna per mezzo dalla retta XF: ora AL = LB, ed AH = HD; onde AL. AB : : AH. AD, e in confeguenza le rette DB, HL fon parallele e divife ciafcuna per mezzo dal diametro XF: così li trapezoidi RMDB, RMLH ed HLBD fono altresì divifi ciafcuno in due parti uguali dallo fteffo diametro; e però terminando il rimanente come fopra, s' avrà RDH = MBL.

738. DIFFINIZIONE. Se dato un diametro RS (*Fig.* 465.) colla fua tangente RT, pel centro O tirifi un diametro MN parallelo alla tangente, effo chiamafi *diametro conjugato del diametro* RS.

739. PROPOSIZIONE CXLVI. *Il quadro di qualfivoglia ordinata* HE (Fig. 465.) *a un diametro* RS *è al rettangolo* RH × HS *delle parti di effo diametro, ch' ella taglia, come il quadro del diametro* MN *conjugato del diametro* RS *è al quadro del diametro* RS.

Le rette HE, MO effend' ordinate al diametro RS, abbiamo $\overline{EH}^2$. RH × HS : : $\overline{MO}^2$. RO × OS (*N.* 730.) : ma RO = OS; onde

onde $\dot{\overline{EH}}$. RH × HS : : $\dot{\overline{MO}}$. $\dot{\overline{RO}}$: ora $\dot{\overline{MO}}$. $\dot{\overline{RO}}$: : $\dot{\overline{MN}}$. $\dot{\overline{RS}}$; dunque $\dot{\overline{EH}}$. RH × HS : : $\dot{\overline{MN}}$. $\dot{\overline{RS}}$.

740. PROPOSIZIONE CXLVII. *Qualsivoglia linea* EF, *la quale d'ambe le parti termina alla curva* (Fig.465.) , *ed è parallela a un diametro* RS, *viene segata per mezzo dal diametro* MN *conjugato del diametro* RS.

Da' termini E, F della retta EF tiro al diametro RS l'ordinate EH, FL, le quali sono fra lor parallele ed uguali, a motivo delle parallele EF, RS. Ora noi abbiamo $\dot{\overline{HE}}$. RH × HS : : $\dot{\overline{LF}}$. RL × LS (*N.* 730.) , ed $\dot{\overline{HE}} = \dot{\overline{LF}}$, a cagione di HE = LF; dunque RH × HS = RL × LS: ma RH × HS = $\dot{\overline{RO}} - \dot{\overline{HO}}$, ed RL × LS = $\dot{\overline{SO}}$, ovvero $\dot{\overline{RO}} - \dot{\overline{LO}}$; onde $\dot{\overline{RO}} - \dot{\overline{HO}} = \dot{\overline{RO}} - \dot{\overline{LO}}$, e per conseguenza $\dot{\overline{HO}} = \dot{\overline{LO}}$, ed HO = LO : ma a motivo delle parallele HE, MO, LF, ed EF, RS, abbiamo HO = EV, ed LO = VF; però EV = VF.

741. COROLLARIO. Quindi tutte le parallele al diametro RS sono doppie ordinate al suo diametro conjugato MN ; e per conseguenza la tangente TQ tirata dal vertice M è parallela ad RS ; dal che ne risulta, che RS è'l diametro conjugato del suo conjugato MN, e che 'l quadro di qualsivoglia ordinata EV al diametro MN è al rettangolo MV × VN delle parti di detto diametro, ch' essa taglia , come 'l quadro di RS è al quadro di MN.

742. PROPOSIZIONE CLXVIII. *Dati due assi* AB , CD (Fig. 466.) *e due diametri conjugati* MN , RS , *il rettangolo* PQTV *dei due assi , cioè 'l rettangolo formato dalle quattro tangenti de' due assi equivale al parallelogramno dei due diametri , cioè al parallelogrammo* XZHL *fatto dalle tangenti de' diametri*.

Il segmento ADB segato dall' asse maggiore AB, e 'l segmento MSN tagliato dal diametro MN hanno le parti OD, OS de' loro diametri comprese fra la curva e le lor basi AB , MN proporzionali a questi stessi diametri ; poichè OD . OC : : OS. OR; dunque i massimi triangoli ADB , MSN iscritti in questi segmenti son' uguali (N. 737.) : ora il triangolo ADB è la metà del rettangolo AQTB d'ugual base ed altezza , e 'l triangolo MSN è la metà del parallelogrammo MHLN ; onde AQTB equivale ad MHLN,

e cc.

e conseguentemente il rettangolo PQTV doppio di AQTB è uguale al parallelogrammo XZLH doppio di MHLN.

743. COROLLARIO I°. *Poste le stesse cose, se dall' estremità* D *dell' asse minore* (Fig. 467.) *tirasi un' ordinata* DV *al diametro* MN, *e che dall' estremità* S *dell' altro diametro conjugato* RS *tirisi un' ordinata* SL *al grand' asse* AB, *dico; che'l diametro* MN *e'l grand' asse saranno tagliati nella stessa ragione in* V *ed* L *dalle loro ordinate* DV, SL.

Prolungo l'ordinate DV ed LS; la prima, finchè in Y seghi la tangente SY del diametro RS conjugato di MN, e la seconda, finchè seghi in X la tangente DT del picciolo asse; e quindi tiro DS. Il triangolo ODS è la metà del parallelogrammo OVYS d'ugual base ed altezza, ed è pure la metà del rettangolo ODXL; onde'l parallelogrammo OVYS equivale al rettangolo ODXL: ora il parallelogrammo OMHS, essendo 'l quarto del parallelogrammo de' diametri conjugati MN, RS, è uguale al rettangolo ODTB, ch'è'l quarto del rettangolo de' due assi (*N.* 742.); però i parallelogrammi OMHS, OVYS sono fra loro nella stessa ragione de' rettangoli ODTB, ODXL, che lor sono uguali ciascuno a ciascuno: ma i parallelogrammi OMHS, OVYS, avendo l'altezza comune OS, sono fra se come le lor basi OM, OV; e i rettangoli ODTB, ODXL, avendo l'altezza comune OD, sono fra se come le lor basi OB, OL; dunque OM . OV : : OB . OL, e perciò OM . OM — OV : : OB . OB — OL, ovvero OM, MV : : OB . BL; e facendo'l doppio degli antecedenti, avremo MN . MV : : AB . BL; e in fine dividendo, s'avrà MN — MV . MV : : AB — BL . BL, o pure NV . MV : : AL . BL.

744. COROLLARIO II. *Poste ancora le stesse cose, se dall' estremità* M *del diametro* MN (Fig. 468.) *tirasi l' ordinata* MH *al picciolo asse, e dall' estremità* S *dell' altro diametro conjugato l' ordinata* SL *al grand' asse, i due assi saran tagliati proporzionalmente ne' punti* H, L.

Prolungo il diametro MN, finchè seghi in T la tangente DT dell' asse minore, e da D tiro l' ordinata DV a esso diametro. I triangoli simili ODT, OHM ci danno OD . OH : : OT . OM : ora, a motivo della tangente DT, e dell' ordinata DV condotta dal punto del contatto, si ha OV . OM : : OM . OT, ovvero OT . OM : : OM . OV; dunque OD . OH : : OM, OV : ma OM . OV : : OB . OL (*N.* 743.); onde OD . OH OB . OL.

745. COROLLARIO III. *Poste ancora le stesse cose, il quadro dell'ordinata* MH (Fig. 468.) *all'asse minore tirata dal vertice del diametro* MN *è uguale al rettangolo* BL × LA *delle parti del grand'asse tagliate dall'ordinata* SL *condotta dal vertice del diametro conjugato* RS; *e reciprocamente il quadro dell'ordinata* LS *è uguale al rettangolo* CH × HD *delle parti dell'asse minore tagliate dall'ordinata* MH.

Essendo li due assi segati proporzionalmente in H ed L (*N*.744), si ha DH . DC : : BL . BA, e CH . DC : : AL . AB; moltiplicando adunque insieme i termini di queste due proporzioni, avremo $DH \times CH . \overline{DC}^2 : : BL \times AL . \overline{AB}^2$, ovvero $DH \times CH . BL \times AL : : \overline{DC}^2 . \overline{AB}^2$: ora, per la natura dell'elisse, noi abbiamo $\overline{LS}^2 . BL \times AL : : \overline{DC}^2 . \overline{AB}^2$; onde $\overline{LS}^2 . BL \times AL : : DH \times CH . BL \times AL$; e però, a motivo de'conseguenti uguali, avremo $\overline{LS}^2 = DH \times CH$.

Così pure noi abbiamo $\overline{MH}^2 . DH \times CH : : \overline{AB}^2 . \overline{CD}^2$, ovvero $DH \times CH . \overline{MH}^2 : : \overline{CD}^2 . \overline{AB}^2$: ma egli s'è trovato $DH \times CH . BL \times AL : : \overline{DC}^2 . \overline{AB}^2$; dunque $DH \times CH . \overline{MH}^2 : : DH \times CH . BL \times AL$, e per conseguente $\overline{MH}^2 = BL \times AL$.

746. COROLLARIO IV. *Poste ancora le stesse cose* (Fig. 468.), *i quadri de' diametri conjugati* MN, RS *sono insieme uguali ai quadri de' due assi pres' insieme*.

Il triangolo rettangolo OMH ci dà $\overline{OM}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{MH}^2$: ma (*N.* 745.) $\overline{MH}^2 = BL \times AL$; dunque $\overline{OM}^2 = \overline{OH}^2 + BL \times AL$. Similmente, nel triangolo rettangolo OSL, abbiamo $\overline{OS}^2 = \overline{OL}^2 + \overline{LS}^2$: ma $\overline{LS}^2 = CH \times HD$: onde $\overline{OS}^2 = \overline{OL}^2 + CH \times HD$; e perciò $\overline{OM}^2 + \overline{OS}^2 = \overline{OH}^2 + BL \times AL + \overline{OL}^2 + CH \times HD$: ora, essendo l'asse AB diviso in due ugualmente in O e disugualmente in L, abbiamo $BL \times AL + \overline{OL}^2 = \overline{BO}^2$, e per la stessa ragione $CH \times HD + \overline{OH}^2 = \overline{OD}^2$; dunque $\overline{OM}^2 + \overline{OS}^2 = \overline{BO}^2 + \overline{OD}^2$. Dunque, ec.

747. CO-

747. COROLLARIO V. *Se dall' estremità* M, R *de' diametri conjugati* MN, RS (Fig.469.) *tiransi dell' ordinate al grand' asse, il rettangolo* AF × FB *delle parti tronche dall' una dell' ordinate equivale al quadro della distanza* LO *dall' altra ordinata al centro* O.

Dal punto M tiro all' asse minore l' ordinata MV, e per conseguenza il quadro di detta ordinata equivale al rettangolo AF × FB: ma MV = LO; dunque $\overline{LO}^2 = AF \times FB$: si proverà nello stesso modo, che $\overline{FO}^2 = AL \times LB$.

748. PROPOSIZIONE CL. *Nell' Elisse vi sono sempre due diametri conjugati uguali, e tutti gli altri son disuguali.*

Sia l' elisse ADCB (*Fig.* 470.), di cui AB è l' asse maggiore e CD il minore: colle rette AD, DB, BC, AC io unisco l' estremità di quest' assi; il che mi dà un parallelogrammo ABCD, i cui quattro lati son' uguali. Dal centro O tiro la retta NM parallela al lato CA; il che divide 'l parallelogrammo ABCD in due parallelogrammi uguali AHCL, HDBL, perocchè uguali sono i triangoli simili AOH, BOL a motivo del lato AO uguale al lato OB: per la stessa ragione i triangoli simili AOC, DOB son uguali, e i triangoli simili COL HOD lo son pure, a motivo de' lato CO uguale al lato OD; così i parallelogrammi AHCL, I HDBL, essendo composti d' uno stesso numero di triangoli uguali ciascuno a ciascuno, sono fra se uguali: ora essendo detti parallelogrammi fra le parallele AD, CB, hanno la medesima altezza; onde la base CL dee equivalere alla base LB, e perciò AH = HD; dunque MN divide per mezzo le due rette CB, AD, che sono fra lor parallele, e che d' ambe le parti terminano alla curva; ed in conseguenza MN è un diametro.

Si proverà nella stessa maniera, che se dal centro O tirasi una linea RS parallela al lato AD del parallelogrammo ABCD, ella sarà pure un diametro, il quale, per essere parallelo all' ordinate AH, CL del diametro MM, sarà conjugato dello stesso.

Ora, uguali essendo le linee AD, AC, eglino sono ancora le lor metà AH, AP, e per conseguente il parallelogrammo AHOP è composto di quattro lati uguali; donde avviene, che perfettamente uguali sono i triangoli AHO, APO, aventi'l lato AO comune, ed i lati AH, OH uguali fra loro ed a lati AP, PH, e che 'l angolo AOH equivale all' angolo AOP; concependo però, che la se-

mieliffe ADB fia fovrappofta alla fua uguale ACB, talmente che l'angolo retto AOD cada full'angolo retto AOC, la curva ADB caderà fopra la curva ACB, l'angolo AOM fopra'l fuo uguale AOR, e'l lato OM farà uguale al lato OR : ora MN e'l doppio di ON (*N. 696.*), ed OR il doppio di RS; onde i diametri conjugati MN, RS fon' uguali.

Ora fi concepifcano due altri diametri conjugati ad arbitrio diverfi da' due conjugati ed uguali MN, RS, che fi fon ritrovati (*Fig.471.*); l'uno di effi taglierà i quarti d'eliffe AG o infra R ed A, o infra R e C. Supponiamo, ch'e'li feghi fra R ed A in T, e che quefto diametro fia la retta TV, maggiore in confeguenza di RS (*N. 705.*); da' punti R, T io tiro le tangenti RX, TZ, le quali fi fegheranno in qualche punto Y fra i punti del contato R, T (*N.710.*); quindi è, che s'io prolungo la tangente YTZ e'l diametro NM parallelo alla tangente RX, la tangente YZL fegherà in L il diametro NM, e l'angolo QZL efteriore al triangolo ZOL farà maggior dell'angolo interno AOL : ora effendo il diametro HP, il quale è conjugato del diametro TV, parallelo alla tangente TZ, gli angoli dalla fteffa banda QZL, QOH fon'uguali; onde l'angolo QOH, od AOH è maggiore dell'angolo QOL, o ZOL, od AOM; e per confeguente MO è maggiore di HO (*N.* 705.), ed MN di HP : ma TV è maggiore di RS, o del fuo uguale MN; dunque molto più TV è maggiore del fuo conjugato HP.

Si proverà nello fteffo modo, che fe l'uno de' diametri conjugati paffa fra R e G, nel qual cafo egli farà minore di RS, il fuo conjugato farà maggiore di MN uguale ad RS.

749. COROLLARIO. *Dati in un' Eliffe i due diametri conjugati ed uguali* MN, RS (Fig. 472.), *il quadro di qualfivoglia ordinata* PH *all' uno di effi* MN *equivale al rettangolo* MH × HN *delle parti di detto diametro fegate dall' ordinata.*

Imperocchè noi abbiamo $\overline{PH}^2 . MH \times HN :: \overline{RS}^2 . \overline{MN}^2$: ma a cagione di $RS = MN$ noi abbiam pure $\overline{RS}^2 = \overline{MN}^2$; dunque $\overline{PH}^2 = MH \times HN$.

750. AVVERTIMENTO. La proprietà dell' eliffe rifpetto ai diametri conjugati è dunque fimile a quella del circolo; e in quefto folo differifce, che nel circolo, l'ordinata è fempre perpendicolare al fuo diametro, là dove nell'eliffe, l'angolo PHM (Fig.472.)

for-

formato dall' ordinata coll' uno de' due diametri conjugati ed uguali è sempte acuto, perocch' egli è uguale all' angolo ROM formato dai due diametri : ora ROM (*Fig.* 470.) è uguale all' angolo CBD del parallelogrammo ABDC , e CBD è acuto , come si dimostrerà ; onde l' angolo PHM (*Fig.* 472.) è altresì acuto.

Quindi a fine di provare , che l' angolo CBD (*Fig.* 470.) è acuto , basta solo avvertire , che i due triangoli isosceli CBD , ACB hanno i lati CB, BD uguali ciascuno a ciascuno a' lati AC, CB: ma la base CD del primo è minor della base AB del secondo ; dunque l' angolo CBD è minore dell' angolo ACB : ora nel parallelogrammo ACBD, i due angoli CBD , ACB vagliono insieme due retti ; però CBD vale meno, ed ACB più d' un retto.

751. PROPOSIZIONE CLI. *Se dato l' asse ed uno, o due diametri* MN, HL (Fig. 473.) , *i quali non sieno fra loro conjugati, dall'estremità di essi tiransi quattro tangenti* TR, PE, *e* TP , RE, *le quali si seghino in* T, R, E, P, *cadauna delle due* TR , FE *tirate dall' estremità del diametro* MN *sarà divisa in* M *ed* N *in due parti uguali ciascuna a ciascuna, cioè* TM = NE, *ed* MR = NP; *e similmente, cadauna delle due* TP, RE *sarà divisa in due parti uguali ciascuna a ciascuna.*

Tiro le rette HM, NL , che congiungono l' estremità de' due diametri, e a motivo di MO. MN : : HO. HL , le rette HM, NL sono fra lor parallele. Dal punto T, in cui le tangenti HT , MT si segano, pel mezzo S della retta HM tiro la linea TE , ch'è un diametro (*N.* 731.) , e che conseguentemente sega pure in due parti uguali la retta NL parallela ad HM ; dal che ne segue, esser questo diametro simile a quello, che tirerebbesi dal punto E, in cui le due tangenti NE, EL si segano pel mezzo Z della retta NL, che congiugne i punti del contatto N , L. Ora le tangenti TR, PE essendo fra se parallele, poichè esser debbono parallele all' ordinate del diametro MN, è evidente , che i triangoli TMO , NOE son simili, ed in oltre uguali, a cagione del lato MO uguale al lato NO ; onde TM = NE: ma TR = PE, a motivo del parallelogrammo TREP ; dunque TR — TM , od MR = PN.

Parimente i triangoli simili HTO , EOL , avendo 'l lato HO uguale al lato OL, son perfettamente uguali , ed in conseguenza HT = EL: ma PT = ER ; onde PH = LR.

752. COROLLARIO. *Poste le stesse cose, dico; che 'l rettangolo* TM

TM × MR (Fig. 474.) *delle due parti della tangente* TR *al vertice* M *del diametro* MN *equivale al quadro del semidiametro* OZ *conjugato di* MN , *e che'l rettangolo* TH × HP *delle parti della tangente* TP *al vertice* H *del diametro* HL *equivale al quadro del semidiametro* OE *conjugato di* HL.

Prolungo la tangente PT fino al concorso del diametro MN prolungato in B, e dal punto del contatto tirando l'ordinata HC al diametro MN, si ha OC. OM : : OM . OB (*N.* 732.), ovvero OB. OM : : OM. OC; dunque OB — OM. OB: : OM —OC. OM, cioè BM. OB : : MC. MO, ovvero BM. MC: : BO. MO; e quindi BM. BM + MC : : BO. BO + MO, cioè BM. BC : : BO. BO + MO: ma a motivo di MO = ON; noi abbiamo BO + MO = BO + ON = BN; onde BM. BC : : BO. BN: ora, simili essendo i triangoli BMT, BCH, BOX, BNP, le lor basi TM, HC, XO, PN son nella stessa ragione de' lati BM, BC, BO, BN; però TM. HC : : XO. PN, e quindi TM × PN = HC × XO: ma dal punto del contatto H tirando al semidiametro conjugato OZ l'ordinata HQ, che sarà parallela ad MN, avremo OQ. OZ : : OZ. OX, e a motivo delle parallele HQ, CO, uguali sono le parallele HC, QO; dundue HC. OZ : : OZ. OX; dal che io deduco HC × OX $= \overline{OZ}^2$, e per conseguenza TM × PN $= \overline{OZ}^2$: ma PN = MR (*N.* 751.); però TM × MR $= \overline{OZ}^2$; e nella stessa maniera si proverà, che TH × HP $= \overline{OE}^2$.

753. AVVERTIMENTO. Dal predetto Corollario e' si deduce la Regola, o'l Teorema seguente: *se la retta* OB *è divisa in* C *ed* M, *tal che s'abbia* OC. OM : : OM. OB, *e che dal lato di* O *le s'aggiunga una retta* ON *uguale alla media proporzionale* OM, *s'avrà* BM. BC : : BO. BN.

Ora dal detto Teorema io ne inferisco un'altro del pari importante; cioè, *che se una linea* OB *è divisa in* C *ed* M, *talmente che s'abbia* OC. OM : : OM. OB, *e che dal lato di* O *le s'aggiunga una retta* ON *uguale alla media proporzionale* OM, *l'intera linea* OB *sarà divis' armonicamente ne' punti* M, C, *e s'avrà* BM. MC : : BN. CN; il che io provo in questo modo.

Per ipotesi noi abbiamo OC. OM : : OM. OB, ovvero OB. OM : : OM. OC; dunque BO — OM. OM : : OM — OC. OC, cioè BM. OM : : MC. OC, o sia BM. MC : : OM. OC, così pure, a mo-

a motivo di BO . OM : : OM . OC, noi abbiamo BO + OM . OM : : OM + OC . OC : ma OM = ON ; onde BN . OM : : CN . OC, ovvero BN . CN : : OM . OC : ma egli s'è già trovato BM . MC : : OM . OC ; però BM . MC : : BN . CN .

E quindi ella è facil cosa provare l' oppoſto di queſto ſecondo Teorema ; cioè, che *ſe una linea* BN *è diviſ' armonicamente ne' punti* M, C, *e che dividaſi per mezzo in* O *la ſomma* MN *di due delle ſue parti conſeguenti* NC, CM, *s'avrà ſempre* OC . OM : : OM . OB, e BM . BC : : BO . BN .

Poichè, ſiccome BM . MC : : BN . CN ; così BN . BM : : CN . MC, e però BN + BM . BM : : CN + MC . MC : ma BN = NM + MB, e CN + MC = MN ; onde NM + 2BM . BM : : MN . MC, e prendendo la metà degli antecedenti, avremo OM + MB . BM : : OM . MC, ovvero OB . BM : : OM . MC ; dunque OB — BM . OB : : OM — MC . OM, cioè OM . OB : : OC . OM, ovvero OC . OM : : OM . OB : quindi, a motivo di ON uguale alla media proporzionale, noi avremo come ſopra BM . BC : : BO . BN .

754. PROBLEMA. *Data un' Eliſſe* ACBD (Fig. 475.) *trovarne il ſuo centro, i ſuoi due aſſi, ed i ſuoi fuochi.*

Tiro delle linee HL, PQ, ec. fra lor parallele, e che d' ambe le parti terminino alla curva ; le divido ciaſcuna per mezzo ne' punti R, S, ec. e facendo per i punti R, S, ec. paſſar' una retta MN, ella ſarà un diametro, ed in conſeguenza il punto O, il quale ſega per mezzo queſta linea, è 'l centro; e ſe le rette HL, PQ, ec. ſon perpendicolari ad MN, la retta MN ſarà l'uno, o l' altro dei due aſſi.

Altrimenti, dal centro O io deſcrivo un circolo, il quale ſeghi la curva in qualche punto T ; e così 'l raggio OT di queſto circolo è minor del ſemiaſſe maggiore, perocchè il circolo, che ha per raggio il grand'aſſe, è circonſcritto all'eliſſe, ſenza ſegarla ; e queſto ſteſſo raggio OT è maggior del ſemiaſſe minore, a cagione che 'l circolo, il quale ha per raggio il ſemiaſſe minore, è iſcritto, ſenza pure ſegar la curva ; dunque 'l circolo del raggio OT dee ſegar l' eliſſe in quattro punti T, X, Z, Y (*N.*707.) . Conduco da queſti quattro punti le rette TX, XZ, ZY, YT, e ſegandole ciaſcuna per mezzo, da'punti di diviſione io tiro le rette AB, DC, che terminano alla curva ; quindi elle ſono i due aſſi (*N.* 707.), e per conſeguente la maſſima AB è l'aſſe maggiore, o l' altra il minore.

Piglio

Piglio col compaſſo la grandezza AO del ſemiaſſe maggiore, e dall'eſtremità D dell'aſſe minore io deſcrivo un'arco, che ſeghi l'aſſe maggior ne' punti F, V, che ſono i fuochi (*N.* 729.).

755. PROBLEMA. *Miſurare un' Eliſſe* (Fig. 476,).

Deſcrivo 'l circolo circonſcritto, e miſurandolo, ſimilmente che l'aſſe e 'l picciolo aſſe, dico per la Regola del Tre: l'aſſe maggior' è al minore, come 'l circolo circonſcritto è ad un quarto termine, che ſarà 'l valore dell'eliſſe; poichè, eſſendo la ſomma dell' ordinate del ſemicircolo AEB a quella delle corriſpondenti al grand' aſſe della ſemieliſſe ADB, come 'l grand'aſſe è al picciolo (*N.*703.), egli è per ſe manifeſto, che'l intero circolo è all'intera eliſſe, come l'aſſe maggior' al minore.

Ovvero, deſcrivo 'l circolo iſcritto, e miſurandolo dico per la Regola del Tre: l'aſſe minor' è al maggiore, come 'l circolo iſcritto è ad un quarto termine, che ſarà l'eliſſe; poichè, eſſendo la ſomma dell'ordinate del ſemicircolo CRD, o pure il ſemicircolo CRD alla ſomma dell'ordinate al picciolo aſſe CD della ſemieliſſe CAD, ovvero alla ſemieliſſe CAD, come l'aſſe minor' è al maggiore (*N.* 703.), ne ſegue, che l'intero circolo iſcritto CRDT è all'intera eliſſe, come l'aſſe minor' è al maggiore.

O finalmente, piglio in numeri i valori del circolo circonſcritto e dell'iſcritto, e 'l numero medio proporzionale Geometrico fra queſti due numeri ſi è 'l valore dell'eliſſe (*N.* 703.), cioè moltiplicando inſieme i valori de' due circoli, ed eſtraendo la radice quadra dal prodotto, ella ſarà l'eliſſe.

756. PROBLEMA. *Miſurare un ſegmento d'Eliſſe* rAR *tagliato da una doppia ordinata* rR *al grand' aſſe* (Fig. 477.).

Deſcrivo 'l circolo circonſcritto ANB*n*, e d'ambe le parti io prolungo *r*R, finchè ſeghi la circonferenza del circolo in *n*, N; ciò che mi dà il ſegmento del circolo *n*AN, ch'io miſuro, e poſcia dico per la Regola del Tre: il grand'aſſe è al picciolo, come 'l ſegmento del circolo *n*AN è ad un quarto termine, che ſarà il ſegmento *r*AR; imperocchè qualſivoglia ordinata HT del ſemiſegmento circolare ANM è a qualſivoglia ordinata HS del ſemiſegmento elittico ARM, come OE, OC, ovvero come 'l grand'aſſe al picciolo (*N.* 689.); dunque la ſomma dell'ordinate al ſemiſegmento circolare, o 'l ſemiſegmento AMN è alla ſomma dell'ordinate al ſemiſegmento ARM, o al ſemiſegmento ARM, come l'aſſe maggior' al minore, e però l'intero ſegmento *n*AN è nella medeſima ragione all'intero ſegmento *r*AR.

757. PRO-

757. PROBLEMA. *Misurare un settor' Elittico r*ARO(Fig.477.), *la cui corda r*R *sia doppia ordinata al grand' asse.*

Prolungo la corda *r*R, finchè seghi d'ambe le parti la circonferenza del circolo circonscritto in *n*, N, e da'detti punti io tiro al centro O delle rette *n*O, NO, il che mi dà un settore di circolo *n*ANO, ch'io misuro; poi dico per la Regola del Tre: l'asse maggior' è al minore come 'l settor circolare *n*ANO è ad un quarto termine, che sarà 'l settor' elittico *r*ARO. Imperocchè il semisegmento circolare ANM è al semisegmento elittico ARM come 'l grand' asse è al picciolo (*N.* 756.); e poichè i triangoli MNO, MRO han l'altezza comune, essi sono fra loro come le lor basi MN, MR, o come OE ad OC, o finalmente come l' asse maggior' è al minore; dunque 'l semisegmento ANM più 'l triangolo MNO, cioè 'l semisettore circolare ANO è al semisegmento ARM più 'l triangolo MRO, cioè al semisettore ARO, come 'l grand'asse al picciolo; e per conseguenza l'intero settore *n*ANO è all' intero settore *r*ARO, come l'asse maggior' al minore.

758. AVVERTIMENTO. Se 'l segmento elittico *r*CR (*Fig.*478.) fosse formato da una doppia ordinata *r*R al picciolo asse, descriverei 'l circolo iscritto C*n*DN, e direi per la Regola del Tre: l' asse minor' è al maggiore, come 'l segmento circolare NC*n* è ad un quarto termine, che sarebbe 'l segmento elittico *r*CR.

Così ancora, a fine d'aver' il settore *r*CRO, per la Regola del Tre io direi: l' asse minor' è al maggiore, come 'l settor circolare *n*CNO è ad un quarto termine, che sarebbe 'l settore *r*CRO. Il ch' è facile a dimostrarsi; perchè tutte l' ordinate al semisegmento circolare C*n*M sono all' ordinate del semisegmento elittico C*r*M, come l' asse minor' è al maggiore (N. 702.), e perchè il triangolo M*n*O è al triangolo M*r*O, come M*n* ad M*r*, o come il picciolo asse al grande.

759. PROBLEMA. *Misurare un segmento Elittico* HRL *segato da una base* HL *obbliqua all' asse maggiore, ed al minore* (Fig. 479.).

Sego il grand' asse AB in Z nella stessa ragione che 'l diametro RS della base del dato segmento è diviso in T, cioè faccio RS. RT :: BA. BZ; e da Z tirando una doppia ordinata M*n*, il segmento MB*n* sarà uguale al dato HRL; però egli basterà misurare il segmento MB*n* come sopra (*N.* 756.), e 'l suo valore sarà simile a quello del segmento HRL; ciò ch' io dimostro in questo modo.

Concepiſco, che l'altezza BZ del ſegmento MB*n* ſia diviſa in infinite parti uguali, che da' punti di diviſione ſien tirate delle doppie ordinate, e che dall'eſtremità di ciaſcuna d'eſſe ſieno alzate delle picciole perpendicolari; il che mi darà de' piccioli rettangoli circonſcritti, i quali tutti avranno un'altezza infinitamente picciola ed uguale a ZX. Concepiſco eziandio, che la parte RT del diametro RS ſia diviſa in uno ſteſſo numero di particelle, le quali in conſeguenza ſaranno proporzionali a quelle di BZ, e che da' punti di diviſione ſieno condotte delle doppie ordinate ad RT, alle cui all' eſtremità ſien tirate delle lineette parallele ad RT; il che mi darà tanti parallelogrammi circonſcritti al ſegmento HRL, quanti ſono i rettangoli circonſcritti al ſegmento MB*n*: dal vertice R del diametro RS ſopra la baſe HL del ſegmento HRL io abbaſſo la perpendicolare RK, che dalle doppie ordinate del ſegmento HRL ſarà diviſa in parti uguali e proporzionali alle parti di RT, ed in conſeguenza proporzionali a quelle di BZ; così l'altezze de' parallelogrammi circonſcritti al ſegmento HRL ſarann' uguali fr ſe, e all'altezza EK del primo di eſſi: ora l'altezze de' parallelogrammi eſſendo infinitamente picciole, egli è manifeſto, che la ſomma di loro non differirà dal ſegmento HRL, ſiccome la ſomma de' rettangoli circonſcritti al ſegmento MB*n* non differirà da queſto. Se dunque io provo, che i parallelogrammi circonſcritti al ſegmento HRL ſono inſieme uguali a' rettangoli circonſcritti al ſegmento MB*n*, neceſſariamente n' avverrà, eſſer' i due ſegmenti uguali.

Eſſendo l'aſſe e 'l diametro ſegati proporzionalmente, avremo BZ . BA : : RT . RS, e ZA . BA : : TS . RS; e moltiplicando inſieme i termini di queſte due proporzioni, s' avrà $BZ \times ZA . \overline{BA}^2 : : RT \times TS . \overline{RS}^2$, ovvero $BZ \times ZA . RT \times TS : : \overline{BA}^2 . \overline{RS}^2$: con ſimil diſcorſo noi troveremo $BX \times XA . RQ \times QS : : \overline{BA}^2 . \overline{RS}^2$, e per conſeguenza egli s'avrà $BZ \times ZA . RT \times TS : : BX \times XA . RQ \times QS$, ovvero $BZ \times ZA . BX \times XA : : RT \times TS . RQ \times QS$; e in vece de' due primi termini $BZ \times ZA$, e $BX \times XA$ ponendo i quadri $\overline{MZ}^2$, $\overline{VX}^2$, i quali ſono nella ſteſſa ragione, e in vece de' due ultimi $RT \times TS$, $RQ \times QS$ ponendo i quadrati $\overline{HT}^2$, $\overline{FQ}^2$, i quali ſon pure nella ſteſſa ragione, avre-

mo

mo $\overline{MZ}^2 . \overline{VX}^2 :: \overline{HT}^2 . \overline{FQ}^2$; dal che si deduce MZ. VX :: HT. FQ, e però M*n*. V*u* :: HL. F*f*, cioè le basi de' rettangoli circonscritti al segmento MB*n* sono fra loro come le basi de' parallelogrammi circonscritti al segmento HRL.

Ora, il rettangoletto fatto sopra la base M*n* è M*n* × ZX, e 'l picciolo parallelogrammo formato sopra la base HL è HL × EK: ma ZX. ZB :: EK. RK; onde moltiplicando i termini della prima ragi :ZX, ZB × M*n*, e quei della seconda EK, RK × HL, avremo M*n* × ZX. M*n* × ZB :: HL × EK. HL × RK, ovvero M*n* × ZX. HL × EK :: M*n* × ZB. HL × RK, cioè il rettangoletto formato sopra M*n* è al picciolo parallelogrammo fatto sopra HL, come 'l rettangolo M*n* × ZB è al rettangolo HL × RK. Così pure, il rettangoletto formato sopra V*u* è V*u* × ZX, e 'l picciolo parallelogrammo formato sopra F*f* è F*f* × EK: ma V*u*. F*f* :: M*n*. HL, e ZX. EK :: ZB. BK; onde moltiplicando insieme i termini di queste due proporzioni, avremo V*u* × ZX. F*f* × EK :: M*n* × ZB. HL × RK: così 'l rettangoletto e 'l picciolo parallelogrammo sono ancora fra loro, come 'l rettangolo M*n* × ZB al parallelogramo HL × RK; e siccom' e' si troverà sempre lo stesso, paragonando a cadaun picciolo parallelogrammo circonscritto al segmento HRL ciascun rettangoletto circonscritto al segmento MB*n*, così ne segue, che la somma de' rettangoletti circonscritti al segmento MB*n*, cioè 'l segmento MB*n* è alla somma de' piccioli parallelogrammi circonscritti segmento HLR, cioè al segmento HRL, come 'l rettangolo M*n* × ZB è al rettangolo HL × RK. Ora MN × ZB è doppio del massimo triangolo MB*n* iscritto nel segmento MB*n*, e 'l rettangolo HL × RK è doppio del triangolo maggiore HRL iscritto nel segmento; però questi due triangoli iscritti MB*n*, HRL sono fra loro come i segmenti: ma i due triangoli MB*n*, HRL son' uguali (*N.* 737.); dunqu' egli lo sono altresì i due segmenti MB*n*, HRL.

760. PROBLEMA. *Misurare un settor' Elitico* HRLO, *la cui corda* HL *sia obbliqua ai due assi* (Fig. 479.).

Sego l' asse maggiore in Z nella stessa ragione che 'l diametro RS della corda HL del settore viene segato in T; da Z tiro la doppia ordinata M*n* al grand' asse, e pel centro O le rette MO, *n*O; ciò che mi dà un settore MO*n*B uguale al settore HRLO: così, misurando MONB come sopra (*N.* 759.), il suo valor sarà quello del settore HRLO.

Imperocchè tirando la retta OI perpendicolare ad HL, ella farà l'altezza del triangolo HOL, e la retta OZ farà quella del triangolo MO*n*: ora, essendo l'asse e 'l diametro segati per mezzo in O, e proporzionalmente in T e Z, avremo BZ. ZO : : RT. TO, e a motivo de' triangoli simili RTK, TOI abbiamo RT. TO ∴ : RK. OI; dunque BZ. ZO ∴ RK. OI, ovvero BZ. RK : : ZO. OI: ma i massimi triangoli MB*n*, HRL iscritti ne' segmenti MB*n*, HRL, essendo uguali (*N.* 737.), hanno le basi reciproche alle loro altezze; però M*n*. HL ∴ RK. ZB, ovvero ZB. RK : : HL. M*n*, e quindi ZO. OI : : HL. M*n*; dal che si deduce ZO × M*n* = HL × OI: ora ZO × M*n* è 'l doppio del triangolo MO*n*, ed HL × OI è 'l doppio del triangolo HLO; onde questi due triangoli sono uguali: ma i due segmenti B*n*, MHRL son pure uguali (*N.* 759.); dunque lo sono anche i due settori MO*n*B, HOLR.

761. PROPOSIZIONE CLI. *S'io faccio passare un circolo per l' estremità* C, D *dell' asse minore* (Fig. 480.) *e per l' una dell' estremità* A *del maggiore, la porzione di circonferenza* CHD, *che sarà dalla parte dell' altra estremità* B *del grand' asse, sarà interamente nell' elisse, e l' altra porzione* CNAD *ne sarà interamente fuori.*

Poichè nel circolo la linea CD è segata per mezzo in O dalla retta OH, che l' è perpendicolare, la stessa OH è parte del diametro del circolo; e per conseguente, essendo CO un'ordinata a esso diametro, noi abbiamo AO. OC ∴ OC. OH: ma AO è maggiore di CO; onde molto più ella è maggior di OH; e per conseguenza, essendo OH minore di OB = AO, il punto H è nell'elisse.

Tiro dal vertice A la retta AT perpendicolare al grand'asse AB, ed uguale al suo parametro; così AT sarà minore di AB, poichè 'l parametro del grand'asse è terza proporzionale all' asse maggiore, ed al minore (*N.*691.): dall' estremità T del parametro conduco la retta TB all' altra estremità B del grand' asse, e dal punto H la retta indefinita HK, che passa pel punto G, in cui la retta TB sega 'l picciolo asse; e per la costruzione egli è ad evidenza palese, che la parte HG della retta HK è interamente nel triangolo TBA, e che l' altra sua parte GH è interamente fuori dello stesso: ora ciò posto.

Essendo la retta CO ordinata al diametro AH del circolo, abbiamo

mo $\overline{CO}^2 = AO \times OH$, ed essendo la medesima CO ordinata anche all'asse maggiore, abbiamo $\overline{CO}^2 = AO \times OG$ (*N.693.*) ; dunque $AO \times OH = \times AOOG$, e quindi $OH = OG$. Concepisco, che da ciascun punto della parte OH dell' asse sieno all' elisse condotte dell' ordinate come PE, e che al circolo ne sien condotte dell' altre come PQ; quindi noi avremo, per la proprietà dell'elisse, $\overline{PE}^2 = AP \times PV$ (*N. 693.*), e per quella del circolo, $\overline{PQ}^2 = AP \times PH$: ora i triangoli simili COH, ZPH ci danno GO . OH : : ZP . PH, e noi abbiam ritrovato $GO = OH$; onde $ZP = PH$: ma ZP è minor di VP, poichè, essendo la retta GH interamente nel triangolo OGB, non può la retta ZP segar GB senza essere prolungata; dunque PH è altresì minore di PV, e per conseguenza $AP \times PH$, ovvero $\overline{PQ}^2$ è minor di $AP \times PV$, o $\overline{PE}^2$; donde avviene, che l'ordinata PQ del circolo è minore dell' ordinata PE dell' elisse; e siccome lo stesso egli avverrà rispetto a tutte l'ordinate del circolo e dell'elisse, che passeranno per la retta HO, così ne segue, che l' arco CHD del circolo è interamente nell'elisse; il che doveasi 1°. dimostrare.

Concepisco in oltre, che da ciascun punto della parte AO dell' asse maggiore sieno all' elisse condotte dell' ordinate come MR, e che al circolo ne sien condotte dell'altre come MN; quindi noi avremo, per la proprietà dell' elisse, $\overline{MR}^2 = AM \times MS$ (*N.693.*), e per quella del circolo, $\overline{MN}^2 = AM \times MH$: ora i triangoli simili GOH, XMH ci danno GO. OH : : XM . MH ; dunque $XM = MH$, a motivo di $GO = OH$: ma XM è maggiore di SM, per essere GK interamente fuori del triangolo TAB ; perciò MH è altresì maggiore di SM, e per conseguente $AM \times MH$, ovvero $\overline{NM}^2$ è maggiore di $AM \times MS$, od $\overline{MR}^2$; dal che ne risulta, che l'ordinata NM al circolo è maggiore dell' ordinata MR all' elisse; e siccome lo stesso egli avverrà di tutte l'ordinate al circolo e all'elisse, che dall' una e dall' altra parte si tireranno da ciascun punto di AO, ne segue, che l'arco del circolo CAD è interamente fuori dell' elisse; il che doveasi 2°. dimostrare.

762. PROPOSIUIONE CLII. *S'io faccio passare un circolo per l'estremità* A, B *del grand' asse e per l' una dell' estremità* D *del* pic-

picciolo (Fig. 481.) , *la porzione* AHB *di circonferenza*, *che sarà dalla parte dell' altra estremità* C *dell' asse minore*, *sarà interamente fuori dell'elisse*, *e l'altra porzione* ADB *ne sarà interamente dentro.*

Poichè nel circolo la retta AB viene segata per mezzo in O dalla retta HD , che l' è perpendicolare, la stessa HD è 'l diametro del circolo: così , essendo AO ordinata a questo diametro, noi abbiamo DO. OA : : OA. OH : ma DO è minor di OA; dunque molto più di HO; e per conseguente , essendo HO maggiore di CO = DO, il punto H è fuori dell'elisse.

Dal punto D io tiro la retta DT perpendicolare all'asse minore, ed uguale al suo parametro: così DT sarà maggiore del picciolo asse DC, per essere il parametro del picciolo terza proporzionale all'asse maggiore, ed al minore (*N.* 681.) ; dall'estremità T del parametro io tiro la retta TC all'altra estremità dell'asse minore, e dal punto H la retta indefinita HK, che passa pel punto G, in cui la retta TC sega il grand'asse prolungato se sia d'uopo; e quindi egli è evidente, che la parte GK di HK sarà interamente nel triangolo CTD, e che l'altra sua parte HG sarà interamente fuori dello stesso: ora ciò posto.

La retta AO, essend' ordinata al circolo , ci dà $\overline{AO}^2 = DO \times OH$, e la stessa AO, essend'ordinata all'asse minore dell'elisse , ci dà $\overline{AO}^2 = DO \times OG$ (*N.* 701.) ; dunque $DO \times OH = DO \times OG$, e quindi OH = OG. Concepisco, che da tutt'i punti di OC sieno all'elisse condotte dell'ordinate come PE, e che al circolo ne sien condotte dell'altre come PQ; quindi noi avremo, per la proprietà dell'elisse, $\overline{PE}^2 = DP \times PV$, e per quella del circolo, $\overline{PQ}^2 = DP \times PH$: ora i triangoli simili GOH, ZPH ci danno GO OH : : ZP PH ; onde ZP = PH, a motivo di GO = OH: ma ZP è maggiore di PV, per essere HG interamente fuori del triangolo TDC, in cui VP è rinchiuso ; dunque PH è altresì maggiore di PV , e per conseguenza $DP \times PH$, ovvero $\overline{PQ}^2$ è maggiore di $DP \times PV$, o sia $\overline{PE}^2$; dal che ne risulta , che l'ordinata PQ del circolo è maggiore dell'ordinata PE dell'elisse ; e siccome lo stesso egli avverrà di tutte l'ordinate al circolo e all'elisse condotte dall'una e dall'altra parte da ciascun punto di OC, così ne segue , che l'arco del circolo AHB è interamente fuori dell'elisse ; il che doveasi 1°. dimostrare.

Con-

Concepisco parimente, che da tutt'i punti di DO fieno all'elisse condotte dell'ordinate come MR, e che al circolo ne fien condotte dell'altre come MN; quindi noi avremo, per la proprietà dell'elisse, $\overline{MR}^2 = DM \times MS$, e per quella del circolo, $\overline{MN}^2 = DM \times MH$: ora i triangoli simili GOH, XMH ci danno GO. OH :: XM. MH; dunque XM = MH, a motivo di GO = HO: ma XM è minore di MS, per essere la retta GXK interamente nel triangolo CTD; quindi MH è altresì minore di MS, e per conseguente DM × MH, ovvero $\overline{MN}^2$ è minore di DM × MS, od $\overline{MR}^2$. Donde avviene, che l'ordinata MN del circolo è minore dell'ordinata MR dell'elisse; e siccome lo stesso egli avverrà di tutte l'ordinate del circolo e dell'elisse condotte da ciascun punto di DO dall'una e dall'altra parte, così ne segue, che l'arco del circolo ADB è interamente nell'elisse; il che doveasi 2°. dimostrare.

763. COROLLARIO I°. *Il minore di tutti gli angoli come* CAD, CPD, ec. (Fig. 482.), *che hanno i loro vertici sopra la curva d'un'elisse, e che insistono all'asse minore* CD, *è quello, che ha il suo vertice all'una, o all'altra estremità* A *del grand'asse; e'l maggiore di tutti gli angoli come* ADB, APB, ec. (Fig. 483.), *che hanno i loro vertici sulla curva, e ch'insistono all'asse maggiore* AB, *è quello, che ha'l suo vertice all'una, o all'altra estremità del picciolo asse.*

Faccio passare un circolo per l'estremità C, D dell'asse minore (*Fig.* 482), e pel vertice A del grand'asse; così l'arco CARD è interamente fuori dell'elisse (*N.* 761.): prolungo CP fino alla circonferenza del circolo in R, e da R tiro la linea RD. Ora gli angoli CAD, CRD hanno i loro vertici alla circonferenza del circolo, ed insistono allo stesso arco CHD; dunque questi due angoli son'uguali: ma l'angolo CPD, essendo esterno al triangolo RPD, è maggiore dell'angolo interno PRD; onde l'angolo CAD uguale all'angolo CRD è minor di CPD. Lo stesso si proverà di tutti gli angoli, ch'avranno i loro vertici sopra la semielisse ABD, quando descrivasi un circolo, che passi per i punti C, D, B.

Similmente, faccio passare per l'estremità A, B dell'asse maggiore (*Fig.* 483.) e per l'estremità D del minore un circolo ARDH, il cui arco ARDB è per conseguenza interamente nell'elisse (*N.* 762.); dal punto R, ove la retta BP sega quest'arco, tiro la retta RA, e i due angoli ARB, ADB son' ugua-

uguali, perchè sono alla circonferenza del circolo, ed insistono allo stesso arco AHB: ma essendo ARB esterno al triangolo RPA, egli è maggiore dell'angolo interno BPA; onde l'angolo ADB, uguale all'angolo ARB, è maggiore di BPA; e così degli altri.

764. COROLLARIO II. *Il minore di tutti gli angoli acuti, cui i diametri formano colle loro ordinate, è quello formato dall'uno, o dall'altro de' due diametri conjugati uguali.*

Sia l'elisse ADBC (*Fig.* 484.): dall'estremità degli assi io tiro le rette AD, BD, BC, CA; e dal centro O tirando la retta HOS parallela ad AC, detta linea è l'uno de' due diametri conjugati uguali (*N.* 748.), e l'angolo acuto OQD, ch' ei forma colla sua ordinata AD, equivale all'angolo CAD.

Sia qualsivoglia altro diametro MP differente dal diametro conjugato di HS: da D io tiro una doppia ordinata DR al diametro MP, la quale andrà a terminare alla curva in un punto R differente dal vertice A dell'asse maggiore; imperocchè se andasse a terminare in A, ella sarebbe ordinata al diametro HS, e non al diametro MP: dal punto R io tiro la retta RC; e a cagione di RD divisa per mezzo in T dal suo diametro, e di DC diviso per mezzo in O, le rette RC, TO son parallele, e l'angolo acuto OTD, fatto dal diametro PM colla sua ordinata DR, equivale all' angolo DRC. MA l'angolo DRC è maggior dell'angolo DAC, ovvero del suo uguale DQO (*N.* 763.); onde l'angolo OTD è parimente maggiore di DQO.

765. COROLLARIO III. *Il maggiore di tutti gli angoli ottusi, cui i diametri formano colle loro ordinate, è quello formato dall'uno, o dall'altro de' due diametri conjugati uguali.*

Ciò ad evidenza risulta dal precedente Corollario; imperocchè tutt'i diametri colle loro ordinate formano due angoli, l'uno acuto e l'altro ottuso, i quali presi insieme equivagliono a due retti: così, formando 'l diametro HS, ch' è l' uno de' due conjugati uguali, colle sue ordinate un'angolo acuto minore di ciascuno degli angoli acuti formati dagli altri diametri colle loro, è manifesto, che l'angolo ottuso OQA, fatto dallo stesso diametro HS colle sue ordinate, esser dee maggiore di ciascuno degli angoli ottusi formati dagli altri diametri colle loro; e detto angolo OQA equivale all'angolo ADB, che ha 'l suo vertice in D, e ch' insiste al grand' asse, a cagione delle parallele SQ, DB, e AD, CB.

766. PROBLEMA. *Data un' Elisse* ADBC (Fig. 486.) *trovar un diametro, il quale colle sue ordinate faccia un'angolo uguale al dato* abc

Se

Se'l dato angolo è retto, ognun vede, che i due assi corrispondono perfettamente alla quistione: ma s' egli è acuto, ed uguale all'angolo, che ha il suo vertice all'estremità A del grand'asse, e ch' insiste all' asse minore, il diametro ricercato sarà l'uno, o l'altro de'due conjugati uguali (*N.*764.) : Parimente, se'l dato angolo fosse ottuso, ed uguale all'angolo, che ha il suo vertice all' estremità C dell'asse minore, e ch'insiste all' asse maggiore, il diametro cercato sarebbe ancora l'uno, o l'altro de'due conjugati uguali (*N.*765.) : così tutta la quistione riducesi in rinvenire un diametro, il quale colle sue ordinate faccia un'angolo acuto maggiore di quello, ch'insiste a CD, e che ha il suo vertice in A, ovvero un' ottuso minore di quello, che ha il vertice in C, e ch' insiste all'asse maggiore; e siccome dato l'angolo acuto, che viene da un diametro formato colle sue ordinate, è altresì noto l'ottuso, formato da esso colle stesse ordinate, così tutta la quistione consiste ancora in ritrovare un diametro, il quale colle sue ordinate faccia un dato angolo ottuso *abc* minore dell' angolo, che ha il suo vertice in C: ora ciò posto.

Faccio in A un'angolo LAB uguale all'acuto *abd*, ch'è il compimento del dato ottuso *abc*; alzo in A la retta AX perpendicolare sopra LA; dal punto X, in cui la retta AX sega l' asse minore GD, col raggio XA io descrivo un circolo HAKB; e dall' uno, o dall'altro de' punti R, S, in cui'l circolo sega la curva, p. e. da S all'estremità dell' asse maggiore io tiro le rette SA, SB: Sego ciascuna di queste due rette per mezzo in T e Z; e da' punti di divisione e dal centro O dell' elisse tiro le rette VP, QE, le quali faran due diametri conjugati, che colle loro ordinate formeranno un'angolo ottuso uguale al dato; e'l medesimo facendo in R, troverò ancora altri due diametri conjugati, i quali colle loro ordinate formeran pure lo stesso angolo ottuso. Il che io dimostro in questo modo.

1°. Il circolo passerà per l'altro termine B dell' asse maggiore; poichè i triangoli rettangoli XAO, XBO son' uguali, a motivo del lato AO uguale al lato OB, e del lato comune OX, e per conseguente XB = AX: così XB è raggio del circolo. 2°. L'arco AHB del segmento AHB passa nell'elisse dal lato di A e da quello di B; perocchè essendo la tangente LA perpendicolare ad AX, ella è obbliqua al grand'asse e alla sua tangente AG; donde avviene, che LA, e molto più l'arco AHB entra nell' elisse. Così ancora, s'io tiro in B la retta BF tangente al circolo, ella pu-

pure, e molto più BHA entrerà nell'elisse. 3°. Qualsivoglia angolo, come ASB, iscritto nel segmento BHA equivale all' angolo dato *abc*; imperocchè, ugual' essendo l' angolo del segmento LAB all' acuto *abd*, qualunque angolo, come AKB, iscritto nell' altro segmento sarà parimente uguale all' acuto *abd*, per essere AKB uguale all' angolo LAB: ora gli angoli ASB ed AKB vagliono insieme due retti, poichè insieme abbracciano l' intera circonferenza; però essendo l' angolo AKB uguale all' angolo *abd*, l' angolo ASB equivaler dee all' angolo *abc*, che unito ad *abd* vale pure due retti. 4°. L' arco AHB segar dee (*Fig.* 486.) l' asse minore in un punto H fuori dell' elisse: imperciocchè, se lo segasse all' estremità C, l' angolo ASB iscritto nel segmento ACB equivarrebbe all' angolo, che ha 'l suo vertice all' estremità dell' asse minore, e ch' insiste all' asse maggiore, il ch'è contro l' ipotesi; e se lo segasse entro l' elisse in un punto H, l' angolo AHB iscritto nel segmento sarebbe maggiore dell' angolo ACB, a cagione dell' angolo esterno AHO maggiore dell' interno ACH, e dell' esterno BHO maggiore dell' interno BCH; il ch'è similmente contro l' ipotesi. 5°. Dunque, perchè l' arco AHB (*Fig.* 486.) entra nell' elisse dal lato di A e da quello di B, e perchè quindi egli sega l' asse minore fuori dell' elisse, necessariamente conviene, ch' ei seghi l' elisse in due punti R, S: ora ciò posto, egli è manifesto, che le rette QE, SA son parallele, per essere BS diviso per mezzo in Z, siecome BA lo è in O, ciò che rende i triangoli BOZ, BAS simili fra loro, e l' angolo EZB, formato dal diametro EQ colla sua ordinata SB, uguale all' angolo ASB, ovvero al suo uguale *abc*. Parimente, per essere SA diviso per mezzo in T, siccome AB lo è in O, le rette TO, SB son parallele, e l' angolo ATP, formato dal diametro VP colla sua ordinata SA, è altresì uguale all' angolo ASB, ovvero al dato *abc*: così i due diametri QE, VP corrispondon perfettamente alla quistione, e sono in oltre fra lor conjugati, perocchè son reciprocamente paralleli alle loro ordinate. Lo stesso si proverebbe degli altri due diametri, che si sarebbero da me ritrovati, se mi fossi servito del punto R.

Dell' Iperbola considerata in un Piano fuori del Cono.

767. PROBLEMA. *Descrivere un' Iperbola.*

Piglio due rette AB, CD (*Fig.* 487.) uguali, o disuguali, e le pongo perpendicolari l'una all'altra, in modo che si seghino ciascuna

ſcuna per mezzo in O. Prolungo indeterminatamente l' una delle due AB; ſego il prolungamento BY in piccioliſſime parti uguali BM, MS, e per i punti di diviſione faccio paſſare delle perpendicolari RV, LX. Intorno la linea AB io deſcrivo un circolo; e dal punto M tirando la tangente MN, cerco una quarta proporzionale alle due rette AB, CD e alla tangente MN, e la porto ſopra la perpendicolare RMV da M in R, e da M in V. Così ancora, dal punto S io tiro la tangente ST, e cercando una quarta proporzionale alle due rette AB, CD e alla tangente ST, la porto ſopra la perpendicolare LX da S in L, e da S in X. Lo ſteſſo io faccio riſpetto all' altre perpendicolari tirate ſopra i punti di diviſione d' RY, e facendo per i punti ritrovati e pel punto B paſſare una curva, le ſue ordinate ſono RM, LS, ec. le ſue aſſiſſe ſon BM, MS, ec. e reſta ſolo a provare, che detta curva è un' iperbola.

Per la coſtruzione, noi abbiamo $AB . CD :: MN . MR$, ed $AB . CD :: ST . SL$; onde $MN . MR :: ST . SL$, ovvero $MN . ST :: MR . SL$, cioè l' ordinate MR, SL, ec. della curva ſono fra ſe come le tangenti al circolo tirate da' punti M, S, ec. in cui queſt' ordinate ſegano le loro aſſiſſe. Dunque innalzando 'l tutto al quadrato, avremo $\overline{MN}^2 . \overline{ST}^2 :: \overline{MR}^2 . \overline{SL}^2$. Ora $\overline{MN}^2 = MB \times AM$ (*N.*271.), ed $\overline{ST}^2 = SB \times AS$; però $MB \times AM . SB \times AS :: \overline{MR}^2 . \overline{SL}^2$, cioè i quadri dell' ordinate MR, SL ſono fra eſſi come i rettangoli delle loro aſſiſſe moltiplicate per la linea AB accreſciuta di queſte medeſime aſſiſſe; e per conſeguenza la curva è un' iperbola (*N.* 634.).

768. NOTA. 1°. Che divenendo le tangenti MN, ST tanto maggiori, quanto i punti M, S, ec. ſon più diſtanti dal punto B, l' ordinate MR, SL, ec. le quali ſono quarte proporzionali alle rette AB, CD e alle tangenti, divengono pure altrettanto maggiori, quanto elle ſon più lontane dal vertice B; e ch' in conſeguenza la curva ſi può prolungare in infinito, diſcoſtandoſi ſempre più dall' una e dall' altra parte della linea BY. 2°. Che facendoſi la ſteſſa coſtruzione dal lato di A, s' avrà un' altra curva QZA ſimile ed uguale alla prima HBP.

769. DIFFINIZIONE. La retta AB diceſi primo, e la retta CD ſecondo *aſſe*; il punto O, in cui queſte due rette ſi ſegano, appellaſi *centro*, e le due curve HBP, QAZ dicons' *Iperbole oppoſte*.

Qualunque linea, che paſſa pel centro O, e ſega l'iperbole oppoſte, diceſi *primo diametro*; e quelle linee, che paſſano pel centro O ſenza ſegar l'iperbole, chiamanſi *ſecondi diametri*. Il *parametro* del primo aſſe è una linea terza proporzionale al primo e ſecondo aſſe; e'l *parametro* del ſecondo è una linea terza proporzionale al ſecondo aſſe, e al primo.

La retta CD appellaſi ſecondo aſſe, perocchè ſega per mezzo tutte le linee, come V*u*, che ad eſſa ſon perpendicolari, e che vanno a terminare ſopra l'iperbole; eſſendo manifeſto, che ſe in queſte due curve ſi pigliano due ordinate MV, *mu* equidiſtanti da' loro vertici B, A, ed in conſeguenza uguali, la retta V*u* tirata dalle loro eſtremità ſarà perpendicolare a CD, che la ſegherà per mezzo, poichè M*m* è ſegata per mezzo da CD.

770. COROLLARIO I°. *Il quadro di qualſivoglia ordinata* LS *al primo aſſe è al rettangolo corriſpondente* SB × AS, *come il quadrato dell'aſſe minore è a quello del maggiore.*

Per la coſtruzione, noi abbiamo LS . ST : : CD . AB; onde $\overline{LS}^2 . \overline{ST}^2 : : \overline{CD}^2 . \overline{AB}^2$: ma $\overline{ST}^2 = SB \times AS$ (*N.* 271.); dunque $\overline{LS}^2 . SB \times AS : : \overline{CD}^2 . \overline{AB}^2$.

771. COROLLARIO II. *Il quadro di qualſivoglia ordinata* LS *al primo aſſe è al rettangolo corriſpondente* SB × AS, *come il parametro del primo aſſe è al medeſimo primo aſſe* AB.

Chiamo P il parametro del primo aſſe, e per la diffinizione di queſto parametro ſi ha : : AB. CD . P (*N.* 769.); e però $\overline{AB}^2 . \overline{CD}^2 : : AB . P$ (*N.* 393.), ovvero $\overline{CD}^2 . \overline{AB}^2 : : P . AB$: ora pel Corollario precedente noi abbiamo $\overline{LS}^2 . SB \times AS : : \overline{CD}^2 . \overline{AB}^2$; dunque $\overline{LS}^2 . SB \times AS : : P . AB$.

772. COROLLARIO III. *Se al vertice* B *del primo aſſe* AB (Fig. 488.) *alzaſi una perpendicolare* HB *uguale al parametro di detto aſſe, e che dall'eſtremità* H *di eſſo parametro e dall'altra eſtremità* A *dell'aſſe* AB *ſi tiri una retta indefinita* AT, *che ſeghi in* T *qualſivoglia ordinata* SL *prolungata, ſe ſia d'uopo, il quadro* LS *di queſt'ordinata equivale al rettangolo della ſua aſſiſſa* SB *moltiplicata per la retta* TS.

I triangoli ſimili ABH, AST ci danno AB. BH : : AS. ST; e moltiplicando gli ultimi due termini per BS, avremo AB . BH : : AS × BS . TS × BS, ovvero TS × BS . AS × BS : : BH. AB:

AB: ora $\overline{LS}^2$. AS × BS : : BH. AB (*N.* 771.) ; onde TS × BS . AS × BS : : $\overline{LS}^2$. AS × BS, e però TS × BS = $\overline{LS}^2$ a motivo de' due conseguenti uguali.

773. COROLLARIO IV. *Il quadro di qualsivoglia ordinata* LV *al secondo asse* CD (Fig. 489.) *è a quello della sua assissa* VO, *più 'l quadrato del semiasse secondo* DO , *come il quadro del primo asse è a quello del secondo.*

Da L tiro l'ordinata LS al primo asse, ed ho $\overline{LS}^2$. SB × SA : : $\overline{CD}^2$. $\overline{AB}^2$ (*N.* 770.) : ora, essendo AB diviso per mezzo in O, ed essendogli aggiunta BS, abbiamo SB × BA = $\overline{OS}^2 - \overline{BO}^2$; perciò $\overline{LS}^2$. $\overline{OS}^2 - \overline{BO}^2$: : $\overline{CD}^2$. $\overline{AB}^2$: ma i quadrati $\overline{CD}^2$, $\overline{AB}^2$ degli assi sono fra se come i quadri $\overline{OD}^2$, $\overline{OB}^2$ delle loro metà ; dunque $\overline{LS}^2$. $\overline{OS}^2 - \overline{BO}^2$: : $\overline{OD}^2$. $\overline{OB}^2$, ovvero $\overline{LS}^2$. $\overline{OD}^2$: : $\overline{OS}^2 - \overline{BO}^2$. $\overline{BO}^2$; e componendo , avremo $\overline{LS}^2 + \overline{OD}^2$. $\overline{OD}^2$: : $\overline{OS}^2 - \overline{BO}^2 + \overline{BO}^2$. $\overline{BO}^2$, cioè $\overline{LS}^2 + \overline{OD}^2$. $\overline{OD}^2$: : $\overline{OS}^2$. $\overline{BO}^2$: ora LS = VO , ed OS = VL, poichè VOSL è un parallelogrammo; onde $\overline{LS}^2 = \overline{VO}^2$, ed $\overline{OS}^2 = \overline{VL}^2$; e sostituendo questi valori nell' ultima proporzione, avremo $\overline{VO}^2 + \overline{OD}^2$. $\overline{OD}^2$: : $\overline{VL}^2$. $\overline{BO}^2$, ovvero $\overline{VL}^2$. $\overline{VO}^2 + \overline{OD}^2$: : $\overline{BO}^2$. $\overline{DO}^2$: : $\overline{AB}^2$. $\overline{CD}^2$.

NOTA. Mostreremo a suo luogo, onde nasca, che la proprietà dell'iperbola rispetto al secondo asse non è qui la stessa ch'è rispetto al primo.

774. COROLLARIO V. *Il quadro di qualsivoglia ordinata* LV *al secondo asse è a quello della sua assissa* VO, *più 'l quadrato del semiasse secondo* CO, *come il parametro di detto asse è all' asse* CD.

Chiamo *p* il parametro del secondo asse, e per la diffinizione di esso parametro, ho : : CD. AB. *p* ; dunque $\overline{CD}^2$. $\overline{AB}^2$: : CD. *p* (*N.* 393.) , ovvero *p*. CD : : $\overline{AB}^2$. $\overline{CD}^2$: ma noi abbiamo $\overline{LV}^2$. $\overline{VO}^2 + \overline{OC}^2$: : $\overline{AB}^2$. $\overline{CD}^2$; però $\overline{LV}^2$. $\overline{VO}^2 + \overline{OC}^2$: : *p*. CD.

775. CO-

775. COROLLARIO VI. *Qualsivoglia linea* OZ (Fig.489.), *che passa pel centro* O *e sega l' iperbola , non la sega che in un sol punto* R.

Da R tiro l'ordinata RM al primo asse, e da qualsivoglia altro punto S, preso sopra BS al di sotto di M, ne tiro un' altra LS, che seghi OZ in T. I triangoli simili OMR, OST ci danno MR. TS : : OM. OS; dunque $\overline{RM}^2$. $\overline{TS}^2$: : $\overline{OM}^2$. $\overline{OS}^2$. Ora, per la proprietà dell'iperbola, noi abbiamo $\overline{RM}^2$. $\overline{LS}^2$: : MB × AM. SB × AS (*N.* 767.) : : $\overline{MO}^2$ — $\overline{BO}^2$. $\overline{SO}^2$ — $\overline{OB}^2$ (*N.* 148.): ma $\overline{MO}^2$ — $\overline{BO}^2$ è minore rispetto ad $\overline{SO}^2$ — $\overline{OB}^2$ di quello sia $\overline{OM}^2$ rispetto ad $\overline{OS}^2$; giacchè, per fare che vi fosse proporzione fra i quattro termini $\overline{MO}^2$ — $\overline{BO}^2$, $\overline{SO}^2$ — $\overline{OB}^2$, $\overline{MO}^2$ ed $\overline{OS}^2$, converrebbe, che la parte $\overline{BO}^2$, la quale togliesi da $\overline{MO}^2$, fosse alla parte $\overline{OB}^2$, che levasi da $\overline{SO}^2$, nella stessa ragione che $\overline{MO}^2$ è ad $\overline{SO}^2$, e per conseguente, che la parte $\overline{BO}^2$ tolta da $\overline{MO}^2$ fosse minore della parte $\overline{BO}^2$ levata da $\overline{SO}^2$; onde, poichè da $\overline{MO}^2$ togliesi più del bisogno, conviene di necessità, che $\overline{MO}^2$ — $\overline{BO}^2$ sia minore rispetto ad $\overline{SO}^2$ — $\overline{OB}^2$ che $\overline{MO}^2$ rispetto ad $\overline{OS}^2$; e per conseguenza $\overline{RM}^2$ è altresì minore rispetto ad $\overline{LS}^2$ di quello sia $\overline{RM}^2$ rispetto a $\overline{TS}^2$. Donde ne segue, che $\overline{LS}^2$ è maggior di $\overline{TS}^2$, e quindi LS di TS; e però 'l punto T della retta OT è nell'iperbola : ora siccome lo stesso si proverebbe rispetto a tutti gli altri punti della retta RZ, così egli è manifesto, esser'ella interamente nell'iperbola.

776. COROLLARIO VII. *Se una retta* OR, *che passa pel centro* O, *sega l' iperbola in un punto* R, *dico; ch' essendo detta linea prolungata di là dal vertice, segherà l' iperbola opposta in un punto* X, *talmente che l' intera linea* RX *sarà divisa per mezzo dal centro* O.

Tiro l'ordinata RM, faccio OX = OR, e dal punto X io conduco XZ parallela ad RM, finattanto ch' essa tagli 'l primo asse BA prolungato in Z. I triangoli simili ORM, OXZ ci danno OR. OX : : OM. OZ, e quindi OM = OZ: ora OB = OA; onde

l'as.

l'assissa BM equivale all'assissa AZ, ed in conseguenza l'ordinata RM equivaler dee all'ordinata condotta dal punto Z, mercè che le due iperbole opposte son perfettamente uguali: ma ne' triangoli simili ed uguali ORM, OXZ noi abbiamo RM = XZ ; dunque XZ è l'ordinata condotta dal punto X, e la retta RX, segata per mezzo in O, passa per l'estremità X di quest' ordinata ; e nello stesso modo ch' abbiam dimostrato, che RZ è nell'iperbola(*N.*775.), mostreremo pure, ch'essa taglia l' iperbola opposta in X, ovvero che la sua parte indefinita XY è tutta nell'iperbola opposta.

777. PROBLEMA. *Da un punto L preso sopra l' iperbola* (Fig. 490.) *tirare una tangente alla curva*.

Se'l punto L fosse al vertice B, egli è manifesto, che la tangente sarebbe la linea BK tirata parallela all' ordinate; perocchè tutt'i punti della curva d'ambe le parti sono, per la costruzione dell'iperbola, al di sotto di detta linea.

Ma se'l punto L non trovasi al vertice B, tiro l' ordinata LS al primo asse, e pigliando una terza proporzionale OT alle due linee OS, OB, tiro la retta LT, ch'è la tangente ricercata ; il che io provo nel seguente modo.

Intorno 'l primo asse descrivo 'l circolo AVB, e dal punto T conducendo l'ordinata TV a detto circolo, la retta VS tirata da V per S è tangente del medesimo, e si ha OS. OB : : OB. OT, ovvero OT. OB : : OB. OS (*N.* 292.) ; poscia ne tiro un' altra MR al primo asse fra L e T, la quale seghi l' iperbola in R, e la retta LT in qualche punto Q, senza curarmi se questo punto sia entro, o fuori dell'iperbola.

I triangoli simili LTS, QTM ci danno LS. QM : : TS. TM, e dal punto M tirando la retta MX parallela ad VS, ho TS. TM : : SV. MX, a motivo de' triangoli simili TSV, TMX ; onde LS. QM : : SV. MX, e perciò $\overline{LS}^2 . \overline{QM}^2 : : \overline{SV}^2 . \overline{MX}^2$: ora $\overline{SV}^2 = SB \times AS$; dunque $\overline{LS}^2 . \overline{QM}^2 : : SB \times AS . \overline{MX}^2$, ovvero $\overline{LS}^2 . SB \times AS : : \overline{QM}^2 . \overline{MX}^2$: ma per la proprietà della curva noi abbiamo $\overline{LS}^2 . SB \times AS : : \overline{RM}^2 . MB \times AM$; però $\overline{QM}^2 . \overline{MX}^2 : : \overline{RM}^2 . MB \times AM$: ora $\overline{MX}^2$ è maggiore di $MB \times AM$, poichè MX è tirata parallela alla tangente SV del circolo (*N.* 306.) ; dunque $\overline{QM}^2$ è altresì maggiore di $\overline{RM}^2$, e quindi

di QM maggiore di RM; donde avviene, che 'l punto Q della linea LT è fuori dell' iperbola ; ciò che noi proveremo ancora di tutt' i punti di detta linea compresi fra L e T.

Al di sotto del punto L tiro al primo asse un' altra ordinata HP, che segh' in Z la retta TLZ, e conduco HN parallela alla tangente SV del circolo, finattanto ch' essa tagli l' ordinata TV di detto circolo in un punto N . I triangoli simili TLS , TZH ci danno LS . ZH : : ST . HT , e a cagione de' triangoli simili TSV, THN, noi abbiamo ST. HT ∴ : SV. HN; dunque LS . ZH ∴ : SV . HN , ed $\overline{LS}^2$. $\overline{ZH}^2$ ∴ : $\overline{SV}^2$. $\overline{HN}^2$: ma $\overline{SV}^2$ = SB × AS; però $\overline{LS}^2$. $\overline{ZH}^2$ ∴ ∴ SB × AS. $\overline{HN}^2$, ovvero $\overline{LS}^2$. SB × AS : : $\overline{ZH}^2$. $\overline{HN}^2$ ∴ ora , per la proprietà della curva , noi abbiamo $\overline{LS}^2$. SB × AS : ∴ $\overline{PH}^2$. HB × AB ; onde $\overline{PH}^2$. HB × AH ∴:$\overline{ZH}^2$. $\overline{HN}^2$∴ ma $\overline{HN}^2$ è maggiore di HB × AH (*N.306.*); perciò $\overline{ZH}^2$ è maggiore di $\overline{PH}^2$, e ZH di PH; donde ne segue, che 'l punto Z della retta ZT è fuori della curva ; ciò che noi proveremo ancora di tutti gli altri punti di detta linea presi al di sotto di L: ma noi abbiam veduto, che tutt' i punti della stessa linea , presi fra L e T, sono pure fuori della curva ; dunque TLX non tocca l' iperbola che in L .

778. COROLLARIO I°. *Tutte le tangenti, che tirar si possono da ciascun punto d' un' iperbola* (Fig. 491.) , *sono fra se inclinate, e si segano infra i loro punti del contatto.*

Se le tangenti LT, QP sono l' una dall' uno e l' altra dall' altro lato del primo asse , è manifesto , che andando queste tangenti a terminare all' asse , debbono segarsi in Z fra i loro punti del contatto L, Q.

Se le tangenti QP, RH sono da una stessa parte dell' asse , da' punti del contatto io tiro l' ordinate QS, RM, ed ho per la prima ∴ : SO . BO . OP (*N.* 777.) , e per la seconda : : MO. BO . OH; onde SO × OP = $\overline{OB}^2$, ed MO × OH = $\overline{OB}^2$; dal che io deduco SO × OP = MO × OH , ed SO . MO : : OH . OP: ora SO è minore di MO ; dunque OH è minore di OP ; e quindi la tangente RH, il cui punto del contatto R è più distante dal vertice B, sega l' asse in un punto H , ch' è altresì più dis-

distante dal vertice. Ma questa tangente non può passare da R in H, se non sega la tangente PQX; ed essa non può segarla al punto del contatto in Q, perchè in tal caso segherebbe l' iperbola in due punti R, Q, il ch'è impossibile; non può nè meno detta tangente segar QP infra Q, e P, poichè dovrebbe di necessità passare nell'iperbola, e più non sarebbe tangente; però RH dee segar PQX in qualche punto V fra R e Q.

779. COROLLARIO II. *Da uno stesso punto* L *non si può all' iperbola tirare che una sola tangente.*

La dimostrazione di ciò è simile a quella della parabola (*N.646.*).

780. COROLLARIO III. *Data una tangente* LT (Fig.492.), *e l' ordinata* LS *al primo asse, condotta dal punto del contatto, avremo* 1°. SB . BT : : AS . AT . 2°. SB . ST : : SO . SA.

Intorno 'l primo asse io descrivo 'l circolo AVB, e dal punto T conducendo l' ordinata TV a detto circolo, la retta VS tirata dal punto V ad S sarà tangente del circolo in V, a motivo di : : SO . BO . OT (*N. 292.*); onde rispetto al circolo noi avremo SB . BT : : AS . AT (*N.296.*), ed SB . ST : : SO . SA (*N.294.*): ma queste linee sono le stesse rispetto all' iperbola; dunque, ec.

781. COROLLARIO IV. *Poste le stesse cose del precedente Corollario, se dal punto del contatto* L *alzosi sopra* TL *una perpendicolare* LP, *dico; che la superpendicolare* SP *è alla distanza* SO *dell' ordinata* LS *al centro* O, *come 'l parametro del primo asse è all' asse medesimo.*

Chiamando P il parametro del primo asse, si ha $\overline{LS}^2$. SB × AS : : P . AB: ora, a motivo della perpendicolare LS abbassata dal vertice del triangolo rettangolo TLP sopra la sua ipotenusa TP, noi abbiamo $\overline{LS}^2$ = TS × SP, e a cagione di SB . ST : : SO . SA (*N.* 780.) si ha SB × SA = ST × SO; onde TS × SP, TS × SO : : P . AB: ma poichè i due rettangoli TS × SP, TS × SO hanno una comun dimensione TS, essi sono fra loro come SP, SO; dunque SP . SO : : P . AB.

782. COROLLARIO V. *Poste ancora le stesse cose, se dal punto del contatto* L *tirasi l' ordinata* LX *al second' asse, e che si prolunghi la tangente fino al concorso di detto asse in* H, *avremo* HO × OX = $\overline{OC}^2$, *cioè 'l rettangolo* HO × OX *uguale al quadrato del picciolo semiasse.*

I triangoli simili SLT, HTO ci danno ST . OT : : LS . OH; e mol-

e moltiplicando i primi due termini per OS, e gli ultimi due per LS, avremo $ST \times OS . OT \times OS : : \overline{LS}^2 . SL \times OH$, ovvero $OX \times OH$, a motivo di $OX = SL$: ora, a cagione di $SO \cdot OB : : OB . OT$ (*N.*777.), noi abbiamo $OT \times OS = \overline{OB}^2$, e poichè $SB . ST : : SO . SA$ (*N.* 780.), noi avremo $SB \times AS = ST \times SO$; dunque $SB \times AS . \overline{OB}^2 : : \overline{SL}^2 . OH \times OX$, ovvero $\overline{SL}^2 . SB \times AS : : OH \times OX . \overline{OB}^2$: ma per la proprietà della curva noi abbiamo $\overline{SL}^2 . SB \times AS : : \overline{CO}^2 . \overline{OB}^2$; onde $OH \times OX . \overline{OB}^2 : : \overline{CO}^2 . \overline{OB}^2$, e perciò $OH \times OX = \overline{CO}^2$, a motivo de' conseguenti uguali $\overline{OB}^2, \overline{OB}^2$.

783. DIFFINIZIONE. Se dall' estremità D del secondo asse CD (*Fig.* 493.) tirasi all'estremità del primo la retta DB, e che presa col compasso la retta DB ella si porti sul primo asse prolungato d'ambe le parti da O in E, e da O in G, i punti E, G s'appelleranno i *Fuochi* dell'iperbole opposte.

784. COROLLARIO I°. *Se dall' uno de' fuochi* E *tirasi un' ordinata* EF *al primo asse, il rettangolo* EB × AE, *corrispondente a quest' ordinata, equivale al quadro della metà* OD *del secondo asse.*

Imperocchè nel triangolo rettangolo ODB noi abbiamo $\overline{OD}^2 = \overline{DB}^2 - \overline{OB}^2 = \overline{OE}^2 - \overline{OB}^2$: ma $EB \times AE = \overline{OE}^2 - \overline{OB}^2$ (*N.* 148.); dunque $\overline{OD}^2 = EB \times AE$.

785. COROLLARIO II. *Se dall' estremità* D *del secondo asse tirasi* DM *parallela al primo, e dal punto* M *l' ordinata* MN *altresì al primo, il rettangolo* NB × AN *corrispondente equivale al quadro della metà* OB *del primo asse.*

Per la proprietà della curva, $\overline{NM}^2 . NB \times AN : : \overline{DO}^2 . \overline{OB}^2$: ma $\overline{NM}^2 = \overline{DO}^2$ a motivo delle parallele; dunque $NB \times AN = \overline{OB}^2$.

786. PROPOSIZIONE CLIII. *Se dall'uno de' fuochi* E (Fig.494.) *tirasi un' ordinata* EF *al primo asse, la medesima equivale alla metà del parametro del primo asse.*

Per

Per la proprietà della curva , $\overline{EF}^2 . EB \times AE :: \overline{OD}^2 . \overline{OB}^2$; ma $EB \times AE = \overline{OD}^2$ (*N.* 784.) ; onde $\overline{EF}^2 . \overline{OD}^2 :: \overline{OD}^2 . \overline{OB}^2$, e quindi $\overline{OB}^2 . \overline{OD}^2 :: \overline{OD}^2 . \overline{EF}^2$, e OB . OD :: OD . EF : ora , per la diffinizione del parametro del primo asse ch' io chiamo P, noi abbiamo AB . CD :: CD . P ; dunque pigliando le metà di ciascun termine, si ha OB . OD :: OD . $\frac{1}{2}$P, OD . $\frac{1}{2}$P :: OD . EF , e perciò $\frac{1}{2}P = EF$.

787. PROPOSIZIONE CLIV. *Dato il primo asse* AB , *e un diametro* KL (Fig. 495.) , *colle lor tangenti* BV , LT , *i triangoli* TRB, VRL *formati dalle tangenti coll' asse e col diametro son' uguali*.

Dal punto L tiro l'ordinata LS al primo asse, ed ho OS . OB :: OB . OT (*N.* 777.) : ora i triangoli simili OBV , OSL ci danno OS . OB :: OL . OV ; onde OL . OV :: OB . OT , e per conseguenza tirando le linee LB , VT , elle son parallele : ora i triangoli LBV , LBT , compresi fra queste due parallele , son' uguali, perocchè hanno la base comune LB ; dunque d' amendue le parti togliendo il triangolo comune LRB , avremo TRB = VRL.

788. COROLLARIO. *Il triangolo* LTS *formato dalla tangente* LT *del diametro* KL *col primo asse , e colla sua ordinata* LS *condotta dal punto del contatto, equivale al trapezoide formato dalla stessa ordinata* LS, *colla tangente* BV *del primo asse compresa fra'l detto primo asse , e 'l diametro.*

I triangoli TRB, VRL sono uguali (*N.*787.) ; però ad ambe le parti aggiugnendo BRLS , avremo LTS = BSLV.

NOTA. HO provato sopra (*N.* 776.) , che ciascun diametro LK, terminato fra le due curve opposte , era diviso per mezzo nel centro O: ora , per non ingrandire troppo le Figure, il che ci astrignerebbe a moltiplicare il numero delle Tavole, lascierò nelle Figure delle seguenti Proposizioni di descrivere l' iperbola opposta, e la metà d'un diametro LK resterà indeterminata ; ma nel discorso dovrem sempre supporre, che K sia 'l punto, in cui 'l diametro LK sega la curva opposta ; e così degli altri.

789. ROPOSIZIONE CLV. *Dato il primo asse* AB , *e un diametro* KL (Fig. 496.) , *colle lor tangenti* BV, LT , *che terminano l' una all' asse e l' altra al diametro, se da qualsivoglia punto* X *preso sopra la curva tiransi due rette* FH, PM *parallele al-*

le tangenti, e che terminino al primo asse e al diametro; dico 1°. *che'l triangolo* HXM, *fatto da queste parallele col primo asse, equivale al trapezoide* VBMP, *fatto dalla tangente* SB *del primo asse e dalla sua parallela* XM, *comprese fra'l primo asse e'l diametro.* 2°. *che'l triangolo* PXF, *fatto dalle due parallele e dal diametro* OL, *equivale al trapezoide* LTHF, *fatto dalla tangente* LT *del diametro e dalla sua parallela* FX, *comprese fra'l diametro e'l primo asse.*

I triangoli simili TLS, HXM ci danno TLS . HXM : : $\overline{LS}^2 . \overline{XM}^2$: ora, per la proprietà della curva, noi abbiamo $\overline{LS}^2 . \overline{XM}^2$: : SB × AS . MB × AB, ed egli ci è noto, che CB × AS . MB × AB : : $\overline{SO}^2 - \overline{OB}^2 . \overline{MO}^2 - \overline{OB}^2$ (*N.*148.); onde $\overline{LS}^2 . \overline{XM}^2$: : $\overline{SO}^2 - \overline{OB}^2 . \overline{MO}^2 - \overline{OB}^2$, e TLS . HXM : : $\overline{SO}^2 - \overline{OB}^2 . \overline{MO}^2 - \overline{OB}^2$; e in vece de'quadri $\overline{SO}^2$, $\overline{OB}^2$, $\overline{MO}^2$ ponendo i triangoli simili OLS, OBV, OPM, che sono nella stessa ragione (*N.* 392.), avremo TLS. HXM : : OLS — OBV. OPM — OBV, cioè TLS . HXM : : VBSL . VBMP : ma TLS = VBSL (*N.*788.); però HXM = VBMP. Il che doveasi 1°. dimostrare.

Noi abbiamo TLS = VBSL, e levando da una parte il triangolo HXM e dall'altra il trapezoide VBMP uguale ad HXM, come s'è veduto, resterà TLYH + XMSY = PMSL; poscia d'amendue i lati togliendo la parte comune XMSY, avremo TLYH = PXYL; finalmente all'una e all'altra parte aggiugnendo il picciolo triangolo LYF, avremo TLFH = PXF. Il che doveasi 2°. dimostrare.

NOTA. Il punto X può trovarsi o di là dal punto L, o dall'altro lato della curva; ma la dimostrazione di questi due casi punto non differisce da quella della parabola (*N.* 652.).

790. COROLLARIO I°. *Tutte le linee, come* XZ (Fig.497.), *parallele a qualunque tangente* LT *e seganti l'iperbola, sono tagliate per mezzo dal diametro* KL, *che passa pel punto del contato* L.

Prolungo la retta XZ, finchè seghi 'l primo asse in H; e da' punti X, Z, ne' quali questa retta sega l'iperbola, tiro delle rette MP, ZG parallele alla tangente BV del primo asse. A cagione delle rette PM, ZH, parallele alle tangenti BV, LT del primo asse,

asse, e del diametro KL, il triangolo PXF, fatto con queste parallele e col diametro, equivale al trapezoide LTHF (*N.789.*) : similmente, a motivo delle rette ZH, ZG parallele alle tangenti BV, LT, il triangolo ZFI, fatto da queste parallele col diametro OL prolungato, è altresì uguale al trapezoide LTHF ; dunque il triangolo PXF equivale al triangolo ZFI : ma questi due triangoli son simili, a cagione delle parallele PM, ZG ; ond' essi sono perfettamente uguali, e 'l lato XF è uguale al lato FZ ; però XZ è diviso per mezzo in F.

791. COROLLARIO II. *Dunque qualsivoglia linea* XZ, *parallela alla tangente* LT *d' un diametro* KL *segante l' iperbola*, *è una doppia ordinata al diametro* OL, *e la sua metà* XF, *ovvero* ZF *n' è l' ordinata*.

Quindi si scorge, che a ragione (*N. 769.*) noi abbiam chiamato *Diametri* tutte le linee, come OL, che passan pel centro O, e segano l' iperbola in un punto L.

792. COROLLARIO III. *I quadri dell' ordinate* XF, EY (Fig. 498.) *a qualunque diametro* KL *sono fra se come i rettangoli delle loro assisse moltiplicate pel diametro* KL *accresciuto di queste medesime assisse*.

Tiro la tangente BV del primo asse; prolungo l' ordinate FX, YE fino al concorso del primo asse in H e Q, e da' punti X, E, ne' quali quest' ordinate segan l' iperbola, tiro le rette XP, EZ parallele alla tangente BV. Il triangolo PXF, fatto col diametro OL e colle due linee PX, XF parallele alle tangenti BV, LT, equivale al trapezoide LTHF (*N. 789.*), e per la stessa ragione il triangolo ZEY è uguale al trapezoide LTQY ; dunque PXF. ZEY : : LTHF . LTQY : ora, perchè simili sono i triangoli PXF, ZFY, noi abbiamo PXF. ZEY : : $\overline{FX}^2 . \overline{YE}^2$ (*N. 392.*) ; però $\overline{FX}^2 . \overline{YE}^2$: : LTHF. LTQY : ma LTHF = OFH — OLT, ed LTQY = OYQ — OLT ; onde $\overline{FX}^2 . \overline{YE}^2$ :: OFH — OLT. OYQ — OLT ; ed in vece de' triangoli simili OFH, OLT, OYQ, ponendo i quadri $\overline{OF}^2$, $\overline{OL}^2$, $\overline{OY}^2$ de' loro lati omologhi, i quali quadri sono nella stessa ragione di detti triangoli, avremo $\overline{FX}^2 . \overline{YE}^2 : : \overline{OF}^2 - \overline{OL}^2 . \overline{OY}^2 - \overline{OL}^2$: ma essendo il diametro LOK diviso per mezzo nel centro O (*N. 776.*) ed essendo ad

esso

esso aggiunte le rette LF, LY, abbiamo $FL \times FK = \overline{OF}^2 - \overline{OL}^2$ (*N.* 148.), e perciò anche $YL \times YK = \overline{OY}^2 - \overline{OL}^2$; dunque $\overline{FX}^2 . \overline{YE}^2 : : FL \times FK . YL \times YK$.

NOTA. Che la proprietà dell'iperbola rispetto a tutt' i primi diametri, come KL, è la stessa ch'è rispetto al primo asse.

793. PROPOSIZIONE CLVI. *Dati due diametri* LK, PZ (Fig. 499.) *colle lor tangenti* LT, TP, *che si segano in* T, *se unisconsi i punti del contatto colla linea* LP, *e che pel mezzo* X *di detta linea tirisi la retta* XT *al punto* T, *ella sarà un diametro, e in conseguenza passerà pel centro* O *dell'iperbola*.

La dimostrazione è simile a quella della parabola (*N.*662.).

794. AVVERTIMENTO. Mediante questa Proposizione, tutto ciò, che s'è sopra dimostrato rispetto al primo asse e ad un primo diametro, può altresì dimostrarsi rispetto a' due primi diametri PZ, LK (*Fig.* 499.), o alle loro metà OP, OL.

Poichè, prolungando le tangenti LT, PT fino al concorso de' diametri in H e Q, poscia tirando le rette RL, PM ordinate ai due diametri, cioè parallele alle tangenti, quindi la retta LP, e finalmente dal punto T la retta TF, che passa pel mezzo X della retta LP, e ch'in conseguenza sarà un diametro e passerà pel centro O (*N.* 769.), egli è per se evidente ; ch' a motivo del parallelogrammo LTPF la retta TX, che passa per l'uno degli angoli X, e sega la diagonale LP in due parti uguali, passerà per l'angolo opposto F.

Ora i triangoli simili OFR, OTP ci danno OR . OP : : OF . OT, e a motivo de'triangoli simili OFP, OTH noi abbiamo OP . OH : : OF . OT; dunque OR . OP : : OP . OH : così pure, i triangoli simili OFM, OTL ci danno OM . OL : : OF . OT, e a cagione de' triangoli simili OFL, OTQ abbiamo OL . OQ : : OF . OT ; quindi OM . LO : : OL . OQ ; donde si scorge, che le due rette OR, OM son divise proporzionalmente, e ch' in conseguenza le linee QH, LP, MR, che congiungono i loro punti di divisione, sono fra se parallele.

Dunque 1°. Se dato un diametro PZ da un punto L preso sopra la curva si vuol tirare una tangente, bisogna da detto punto condurre un' ordinata LR al diametro, quindi cercare una terza proporzionale OH alle rette OR, OP, e alla fine tirar la retta

LH,

LH, che farà la tangente ricercata: così egli è lo ftesso che rifpetto al primo affe (*N.* 777.).

Dunque 2°. Il triangolo HTP, fatto dalle tangenti e dal diametro PZ, equivale al triangolo QTL, fatto dalle fteffe tangenti col diametro LK; imperocchè, a motivo delle parallele QH, LP, i triangoli LHP, LPQ, che han la bafe LP comune, fon' uguali; e però d'amendue le parti fottraendo il triangolo comune LTP, avremo HTP = QTL.

Dunque 3°. LHR = LQPR; poichè ai triangoli uguali HTP, QTL aggiugnendo la parte comune LTPR, avremo LHR = LQPR.

Dunque 4°. Se da qualfivoglia punto S prefo fopra la curva tiranfi due rette VN, IE parallele alle tangenti, il triangolo VSE, fatto da quefte parallele col diametro ZP, farà uguale al trapezoide QPEI, fatto dalla tangente PQ di effo diametro e dalla fua parallela IE, terminate fra i due diametri e 'l triangolo ISN fatto dalle parallele; e l'altro diametro farà uguale al trapezoide LHVN, formato dalla tangente LH di effo diametro e dalla fua parallela NV, terminate fra i diametri; il che fi dimoftra come fopra (*N.* 789.).

795. PROPOSIZIONE CLVII. *Se dati due diametri* LK, PZ (Fig. 500.) *colle lor tangenti* LH, PQ *da' due punti* E, F, *prefi fopra la curva fra i due diametri, tiranfi due parallele* ES, IX, *ed* FV, XR *alle tangenti, il trapezoide* NSFR, *fatto da due di quefte parallele col diametro* PZ *e colla più vicina all' altre due, è uguale al trapezoide* ENVI, *fatto da due altre di quefte parallele col diametro* LK *e colla più vicina all' altre due: così pure il trapezoide* ESRX, *fatto da due parallele col diametro* ZP *e colla più lontana dall' altre due, equivale al trapezoide* FVIX, *formato dall' altre due parallele, e dalla più lontana delle due prime.*

La dimoftrazione non differifce da quella della parabola (*N.* 666. 667.).

796. PROPOSIZIONE CLVIII. *Se due rette* EH, FV (Fig 501.), *terminate d' ambe le parti all' iperbola, fi fegano in un punto* G *nell' iperbola, il rettangolo* EG × GH *delle parti della prima* EH *è al rettangolo* FG × GV *delle parti della feconda, come il quadrato* $\overline{PT}^2$ *della tangente del diametro della prima è al quadro* $\overline{LT}^2$ *della tangente del diametro della feconda.*

La dimoftrazione in tutt' i cafi è fimile a quella della parabola (*N.* 668.).

797. PRO-

797. PROPOSIZIONE CLIX. *Se prolungandosi due rette* EI, FH (Fig. 505.), *terminate dall'una e dall'altra parte alla curva, concorrono al di fuori in un punto* R *esterno all'iperbola, il rettangolo* RF × RH *della parte esteriore* RF *della prima per l'intera linea* RH *è al rettangolo* RE × RI *della parte esteriore* RE *della seconda per l'intera linea* RI, *come il quadro* $\overline{PT}^2$ *della tangente del diametro della prima è al quadrato* $\overline{LT}^2$ *della tangente del diametro della seconda*.

La dimostrazione è la stessa di quella della parabola (*N.669.*).

798. PROPOSIZIONE CLX. *Se data una tangente* LT (Fig. 503.) *coll'ordinata* LS *al primo asse dal punto* T *tirasi una secante* TXZ, *ella sarà divisa armonicamente ne' punti* X, V, Z, *in cui è divisa dalla curva e dall'ordinata* LS.

La dimostrazione non differisce da quella della parabola (*N.670.*); e quindi noi potremmo inferirne le medesime Proposizioni, che per la parabola abbiam dedotte (*N. 671.*): lo stesso dicasi rispetto all' elisse; avendo già dimostrato (*N. 713.*), ch' una secante tirata dal punto, in cui la tangente sega l'asse, è altresì divisa armonicamente dalla curva, e dall'ordinata all'asse condotta dal punto del contatto.

799. PROPOSIZIONE CLXI. *Se dati due diametri* LK, ZP (Fig. 504.) *colle lor tangenti* LT, TP *tirasi un' ordinata* XV *all'uno de' diametri* LK, *e che si prolunghi, finchè incontri in* R *la tangente* PT *dell'altro diametro* PZ, *il rettangolo* RX × RV *della parte esteriore* RX *per l' intera linea* RV *è al quadro* $\overline{RP}^2$ *della parte* RP, *cui la retta* VX *sega sopra* PT, *come il quadrato* $\overline{LT}^2$ *della tangente del diametro di* VX *è al quadro* $\overline{TP}^2$ *della tangente dell' altro diametro.*

La dimostrazione è somigliante a quella della parabola (*N.672.*).

800. PROPOSIZIONE CLXII. *Se dati due segmenti* ALB, CID (Fig 505.) *le parti* LX, PS *de' lor diametri comprese in questi segmenti sono proporzionali a' loro diametri* LK, PZ, *i massimi triangoli iscritti in detti segmenti son' uguali.*

La dimostrazione in tutt'i casi è la stessa che quella dell' elisse (*N. 737.*), sostituendo le proprietà dell'iperbola in vece di quelle dell'elisse.

801. DIF.

801. DIFFINIZIONE. Se dato il primo asse AB e 'l secondo CD (*Fig. 506.*) dall'una dell'estremità B del primo tirisi una tangente QP, sopra cui si prendano le parti BP, e BQ uguali ciascuna alla metà OD, ovvero OC del second' asse, le linee indefinite OL, OY tirate dal centro O per l' estremità P, Q della retta QP diconsi *Assintoti* dell'iperbola; e se dette linee si prolungano dall'altro lato del centro in X e Z, elle saranno gli assintoti dell' iperbola opposta, il cui vertice è 'l punto A.

802. COROLLARIO. *Se dai termini* C, D *del second' asse tiransi delle linee all'estremità* B *del primo, dette due linee saranno uguali, a motivo di* C *e* D *equidistanti da* B, *e ciascuna d'esse sarà divisa per mezzo dagli assintoti ne' punti* V, T.

Imperocchè tirando la retta DP, la figura ODPB sarà un rettangolo, e la diagonale OP segherà in due parti uguali la diagonale BD; il che avverrà pure di CB. In oltre DB sarà parallela all'assintoto OY, a motivo di OD parallela ed uguale a QB; e per la stessa ragione anche CB sarà parallela all' assintoto DL.

803. PROPOSIZIONE CLXIII. *L'iperbola è interamente nell' angolo* YOL (Fig. 506.) *fatto dagli assintoti, senza ch' essa li tocchi.*

Si concepiscano infinite linee, come MN, ec. tirate parallele alla tangente, e che seghino l'iperbola e gli assintoti. I triangoli simili NEO, PBO ci danno NE . EO : : PB . BO; dunque $\overline{NE}^2 . \overline{EO}^2 : : \overline{PB}^2$, ovvero $\overline{OD}^2 . \overline{OB}^2$: ora, per la proprietà della curva, noi abbiamo $\overline{EI}^2$. EB × EA : : $\overline{OD}^2 . \overline{OB}^2$, ed EB × EA $= \overline{EO}^2 - \overline{OB}^2$ (*N.*148.) ; onde $\overline{EI}^2 . \overline{EO}^2 - \overline{OB}^2 : : \overline{OD}^2 . \overline{OB}^2$, e però $\overline{EI}^2 . \overline{EO}^2 - \overline{OB}^2 : : \overline{NE}^2 . \overline{EO}^2$: ma $\overline{EO}^2 - \overline{OB}^2$ è minor di $\overline{EO}^2$; dunque $\overline{EI}^2$ è parimente minore di $\overline{NE}^2$, ed EI di NE, cioè 'l punto I della curva è fra gli assintoti, senza ch'ei li tocchi; e siccome ciò avverrà in qualunque caso, ne segue, che l'iperbola non toccherà giammai l'assintoto OL. Noi proveremo nello stesso modo, ch' ella non toccherà giammai l'assintoto OY.

804. COROLLARIO I°. *Se concepiscons' infinite linee, come* MN, ec. *parallele alla tangente* QP, *ovvero al secondo diametro, e che seghino l' iperbola e gli assintoti, le parti* MH, IN *di ciascuna di dette linee, comprese fra la curva e gli assintoti, saranno fra loro uguali.*

 I trian-

I triangoli simili NEO, PBO ci danno NE . PB : : EO . BO, e a cagione dei triangoli simili MEO, QBO noi abbiamo ME . QP : : EO . BO; dunque NE . PB : : ME . QB: ora PB = QB; onde NE = ME: ma HE = EI, per essere HI una doppia ordinata al primo asse; però NE — EI = ME — HE, cioè NI = MH.

805. COROLLARIO II. *Ponendo sempre le rette* MN, ec. *parallele a* QP, *ovvero* CD, *il rettangolo* MH × HN *della parte* MH *di ciascuna d'esse, comprese fra la curva e l'assintoto, pel residuo* HN *di queste stesse linee equivale al quadro* $\overline{QB}^2$, *ovvero* $\overline{CO}^2$ *della metà del secondo asse.*

A motivo de' triangoli simili MEO, QBO, noi abbiamo ME . EO : : QB . BO; dunque $\overline{ME}^2 . \overline{EO}^2 : : \overline{QB}^2 . \overline{BO}^2$: ora, per la proprietà della curva, $\overline{HE}^2 . EB \times EA$, od $\overline{EO}^2 - \overline{BO}^2$ (*N.* 148.) : : $\overline{QB}^2 . \overline{BO}^2$; onde $\overline{ME}^2 . \overline{EO}^2 : : \overline{HE}^2 . \overline{EO}^2 - \overline{BO}^2$, ovvero $\overline{ME}^2 . \overline{HE}^2 : : \overline{EO}^2 . \overline{EO}^2 - \overline{BO}^2$; però dividendo, $\overline{ME}^2 - \overline{HE}^2 . \overline{HE}^2 : : \overline{EO}^2 - \overline{EO}^2 + \overline{BO}^2 . \overline{EO}^2 - \overline{BO}^2$; il che si riduce ad $\overline{ME}^2 - \overline{HE}^2 . \overline{HE}^2 : : \overline{BO}^2 . \overline{EO}^2 - \overline{BO}^2$: ora, perchè HI è divisa per mezzo in E, e perchè MH l'è aggiunta, abbiamo $\overline{ME}^2 - \overline{HE}^2 = MH \times MI = MH \times HN$, a cagione di MI = HN; quindi $MH \times HN . \overline{HE}^2 : : \overline{BO}^2 . \overline{EO}^2 - \overline{BO}^2$, od $\overline{HE}^2 . \overline{EO}^2 - \overline{BO}^2 : : MH \times HN . \overline{BO}^2$: ma $\overline{HE}^2 . \overline{EO}^2 - \overline{BO}^2 : : \overline{QB}^2$, ovvero $\overline{CD}^2 . \overline{BO}^2$: dunque $MH \times HN . \overline{BO}^2 : : \overline{QB}^2$, ovvero $\overline{CD}^2 . \overline{BO}^2$, e perciò $MH \times HN = \overline{QB}^2$.

806. COROLLARIO III. *Tutt'i rettangoli* MH × HN *sono dunque fra loro uguali, poichè son tutti uguali al quadrato* $\overline{QB}^2$, *ovvero* $\overline{CO}^2$.

Lo stesso dicasi de' rettangoli NI × IM.

807. COROLLARIO IV. *Le parti* MH, *od* IN *delle rette* MN *van diminuendo, a misura che le rette* MN *s'allontanan dal centro* O.

Tutt'i rettangoli MH × HN sono fra loro uguali: ora gli HN vanno aumentando, a misura ch'essi son più distanti dal centro O, im-

imperocchè le lor parti HE, essend'ordinate al primo asse, vanno crescendo, a misura che s' allontanan da O, e le lor parti EN, che sono gli elementi del triangolo OEN, vanno altresì aumentando, a misura che s' allontanan da O; dunque, poichè gli HN crescono, necessariamente conviene, a fin di conservare l' egualità de' rettangoli MH × HN, che gli HM diminuiscano,

808. COROLLARIO V. *Gli assintoti* OY, OL *s' accostan sempre più all' iperbola, senza mai toccarla.*

Le doppie ordinate HI, ec. al primo asse saran sempre minori delle MN, ec. (*N.* 803.), e le MH, ovvero le IN andranno diminuendo, a misura che più s'allontaneran dal vertice O(*N.*807.); onde gli assintoti s'accosteranno sempre più alla curva, senza mai poterla toccare.

809. COROLLARIO VI. *Se da qualsivoglia punto* H *preso sopra la curva* (Fig. 507.) *tirasi una retta* RHT *parallela all'assintoto vicino* OY, *la parte* RH *di questa parallela, tirata dalla banda del centro* O, *sarà tutta fuori, e l' altra* HT *tutta dentro l' iperbola.*

Dal punto H tiro la retta MN parallela a QP, ovvero al second'asse CD, ed infra MN e QP tiro un'altra parallela SL contenuta fra gli assintoti, similmente che MN. A cagione delle parallele MN, SL, ed MO, HR, noi abbiamo MH = SI: ma la parte SZ della parallela SL, contenuta fra l' assintoto OY e la curva, è maggiore della parte MH della retta MN (*N.* 807.); dunque SI è minor di SZ, e'l punto I della retta HR è fuori dell'iperbola. Si proverà nella stessa maniera, che tutti gli altri punti di HR son fuori della curva.

Fra gli assintoti al di sotto del punto H tiro un'altra retta FE parallela a QP; così, a cagione delle parallele MN, FE, ed FO, TR, noi avremo FX = MH: ora la parte Ff della retta FE, compresa fra l'assintoto OY e la curva, è minore di MH (*N.*807.); onde FX è maggior di Ff, e'l punto X della retta RHT è nell' iperbola. Si proverà in somigliante guisa, tutt' i punti della parte HT esser' entro l'iperbola.

810. COROLLARIO VII. *Se dal centro* O *d' un' iperbola* (Fig. 507.) *tirasi una retta* OG, *che seghi l' angolo* YOE *degli assintoti* YO, OE, *detta linea segherà l' iperbola, e sarà un diametro.*

Quanto più la retta OG è prolungata, tanto più i suoi punti s'allontanano dall'assintoto OE, con cui ella forma l'angolo GOE;

e all'oppoſto, quanto più l'iperbola è prolungata dal lato di E, tanto più i ſuoi punti s'avvicinano all'aſſintoto (*N*.808.); ora la linea OE e l'iperbola ſi poſſono prolungare in infinito; dunque a forza di prolungare sì l'una che l'altra, troveremo neceſſariamente qualche punto G della linea OG, che ſarà più diſtante dall' aſſintoto OE, di quello ſia 'l punto corriſpondente *g* dell'iperbola. Così 'l punto G ſarà nell'iperbola: ma il punto O della retta OG n'è fuori; onde queſta linea taglierà la curva in qualche punto; dopo di che è manifeſto, ch'ella più non la ſegherà.

811. PROPOSIZIONE CLXIV. *Se da due, o più punti* X, R, *preſi ſopra la curva* (Fig.508.), *tiranſi delle rette* XH, XS, *ed* RL, RI *parallele agli aſſintoti, i rettangoli* XH × XS, RL × LI *ſaranno fra loro uguali*.

Da' punti X, R tiro delle rette HE, MN parallele a QP, ovvero CD, e che terminino agli aſſintoti. I triangoli ſimili MHX, HRI ci danno MX. HX : : HR. RI, e a motivo de' triangoli ſimili NXS, ERL noi abbiamo NX. XS : : ER. RL; però moltiplicando i termini di queſta proporzione per quei della prima, avremo MX × NX. HX × XS : : HR × ER. RI × RL: ma i rettangoli MX × NX, HR × ER ſono fra loro uguali (*N*.806.); ond' egli lo ſon pure i rettangoli HX × XS, RI × RL.

812. COROLLARIO I°. *Se dal vertice* B *io tiro le rette* BV, BT *parallele agli aſſintoti* (Fig. 508.), *e fra loro uguali, perchè ſono le metà delle linee* BD, BC *tirate ai termini* D, C *dell' aſſe minore* (*N*. 802.), *dico; che i rettangoli* HX × XS, RL × RI *ſaranno uguali ciaſcuno al quadro della retta* VB, *o della ſua uguale* BT.

Imperocchè tirando al vertice B dell' iperbola la retta QP, uguale all'aſſe minore CD, e diviſa per mezzo in B (*N*.801.), i triangoli ſimili MXH, QBV ci daranno MX. XH :: QB. BV, e a motivo de' triangoli ſimili NXS, PBT avremo NX. XS :: PB. BT; onde moltiplicando i termini di queſta per quei della precedente proporzione, avremo MX × NX. XH × XS :: QB × PB, o $\overline{QB}^2$. BV × BT, ovvero $\overline{BV}^2$: ora MX × NX $= \overline{QB}^2$ (*N*.802.); però XH × XS $= \overline{BV}^2$: ma XH × XS $=$ RI × RL; dunque anche RI × RL $= \overline{BV}^2$.

NOTA. Da alcuni il quadro della retta BT, o della ſua uguale BV

BV è detto *potenza* dell' iperbola; poich'egli è sempre uguale a' rettangoli XH × XS, RI × RL, ec.

813. COROLLARIO II. *Se da qualsivoglia punto* X, *preso sopra l'iperbola* (Fig. 508.), *tirasi una linea* XH *parallela all'assintoto* OF, *ch'è dall'altra parte della detta iperbola, il rettangolo* XH × OH *della retta* XH *per la parte* OH, *ch'essa taglia sopra l'assintoto* OY, *è sempre uguale al quadro di* BV, *cioè alla potenza dell'iperbola*.

Perocchè dal punto X tirando la retta XS parallela all' assintoto OY, avremo $HX \times XS = \overline{BV}^2$ (*N.* 812.): ora, a cagione delle parallele HX, OS, ed HO, XS, noi abbiamo $HO = XS$; dunque $HX \times XS = HX \times XO$, e quindi $HX \times HO = \overline{BV}^2$. Ciò ch'è la proprietà dell'iperbola fra i suoi assintoti.

814. PROPOSIZIONE CLXV. *Se da due, o più punti* X, R, ec. (Fig. 509.) *presi sopra l'iperbola tiransi delle linee* XT, RS, ec. *fra loro parallele e che coll' assintoto* OY *formino qualunque angolo ad arbitrio, e se da' medesimi punti tiransi pure dell'altre linee* XH, RL, ec. *parallele fra loro e che coll' altro assintoto* OF *formino qualsivoglia angolo, dico; che i rettangoli* TX × XH, SR × RL, ec. *son tutti fra loro uguali*.

Da' punti X, R, ec. tiro delle rette MN, EI fra gli assintoti, e parallele al secondo asse CD. I triangoli simili MTX, ERS ci danno TX . MX : : SR . ER, e a motivo de' triangoli simili HXN, LRI noi abbiamo HX . XN : : LR . RI; onde moltiplicando i termini di questa proporzione per quei della precedente, avremo TX × HX . MX × XN : : SR × LR . ER × RI: ma MX × XN = ER × RI; dunque TX × HX = SR × RL.

815. PROPOSIZIONE CLXVI. *Se fra gli assintoti e' tirasi una retta* MN (Fig. 510.), *che seghi l'iperbola, e sia inclinata al primo asse, le parti* MX, RN *di detta linea, comprese fra la curva e gli assintoti, son' uguali*.

Sopra la retta MN piglio una parte NR uguale alla parte MX, senza curarmi, se l'estremità R di detta parte sia entro, o pur fuori dell'iperbola. Da R tiro le linee RT, RH parallele agli assintoti, e da X le rette XE, XS altresì parallele agli assintoti. Quindi è, che se 'l punto R è sopra la curva, i rettangoli RH × RT, SX × XE dovranno necessariamente esser uguali (N. 811.). Però vediamo, se ci sarà possibile trovar quest' egualità.

I triangoli simili MSX, BHN, avendo 'l lato MX uguale al lato

to NR per la costruzione sono uguali, ed MS = RH, SX = HN: ora, a cagione delle parallele, noi abbiamo SX = OE, ed RH = TO; dunque OE = HN, e quindi OH, ovvero TR = EN, ed MS = TO. I triangoli simili MSX, XEN ci danno MS, o pure TO. SX : : XE. EN, od OH; onde TO × OH, od RH × RT = SX × XE, ed in conseguenza il punto R è veramente sopra la curva.

816. COROLLARIO I°. *Se condotte fra gli assintoti più linee* MN, SL (Fig. 511.), *parallele fra loro ed obblique all' asse, dal centro* O *tirasi 'l loro diametro* OT, *e dal vertice* Z *la tangente* HV *parallela ad* MN, SL, ec. *dico, che questa tangente sarà divisa per mezzo in* Z.

Le doppie ordinate XR, YI al diametro OT son divise per mezzo in E, T da esso diametro; dunque, se ad amendue i lati aggiungonsi le parti uguali MX, RN, ed SY, IL (N. 815.), s'avrà ME = EN, ed ST = TL: ora i triangoli simili OEN, OZV ci danno EN. ZV : : OE. OZ, e a motivo de' triangoli simili OEM, OZH noi avremo ME. HZ :: OE. OZ; però EN. ZV : : ME. HZ: ma EN = ME; onde ZV = ZH.

817. COROLLARIO II. *Poste le medesime cose del precedente Corollario, i rettangoli* MX × XN, SY × YL, ec. *delle parti* MX, SY *delle rette* MN, SL *per i residui* XN, YL *di queste stesse rette son' uguali fra loro e al quadro della metà* ZV, *ovvero* ZH *della tangente del diametro* OT.

Da' punti Y, X, Z tiro le rette Qq, Pp, Ff parallele fra loro e al secondo asse. I triangoli simili SYQ, MXP ci danno SY. QY : : MX. PX, e a motivo de' triangoli simili LYq, NXp noi abbiamo LY. Yq : : NX. Xp; onde moltiplicando insieme i termini di queste due proporzioni, avremo SY × LY. QY × Yp : : MX × NX. PX × XP: ma QY × Yq = PX × Xp (N. 806.); dunque SY × LY = MX × NX.

Ora la retta Ff, non essendo tangente al punto Z, segherà l'iperbola in due punti; e a motivo de' triangoli simili MXP, HZF, ed NXp, VZf, avremo MX. PX : : HZ. FZ, ed NX. Xp : : VZ. Zf; però moltiplicando insieme queste due proporzioni, s'avrà MX × NX. PX × Xp : : HZ × VZ, ovvero $\overline{HZ}^2$: FZ × Zf: ma PX × XP = FZ × Zf (N. 806.); onde MX × NX = $\overline{HZ}^2$: ora MX × NX = SY × YL; dunque SY × YL = $\overline{HZ}^2$.

818. CO-

818. COROLLARIO III. *Tutte le tangenti terminate fra i due assintoti son dunque segate per mezzo ne' punti del contatto.*

Ciò risulta ad evidenza del precedente Corollatio.

819. COROLLARIO IV. *Tirate fra gli assintoti due, o più tangenti* MT, LR (Fig. 512.), *i triangoli* MTO, RLO, *ch' esse formano cogli assintoti, sono fra loro uguali.*

Da' punti del contatto N, S tiro le rette NP, NV, SX, SZ parallele agli assintoti, il che mi dà PN × NV = XS × ZS (*N.* 811.); dal che io deduco NV . ZS : : XS. PN: ora i parallelogrammi PNVO, XSZO, avendo l' angolo POX comune, sono equiangoli, e poichè le lor basi NV, ZS son reciproche a' loro lati XS, PN, le lor' altezze, cioè le perpendicolari Xx, Pp sarann' altresì reciproche alle basi, mercè che i triangoli simili XxS, PpN ci danno Xx . Pp : : XS . PN, e però Xx . Pp : : NV. ZS; dunque Xx × ZS = Pp × NV, cioè i parallelogrammi XSZO, PNVO saran fra loro uguali: ora, a cagione della tangente MT divisa per mezzo in N, e di PN parallela ad OR, il lato MO del triangolo MOT è doppio del lato PO del parallelogrammo PNVO, e la sua base OT è altresì doppia della base OV, o PN dello stesso parallelogrammo; quindi 'l triangolo MOT è doppio del parallelogrammo PNVO, e perciò anche il triangolo LRO è doppio del parallelogrammo XSZO; onde uguali essendo i parallelogrammi PNVO, XSZO, egli lo sono ancora i triangoli MOV, RML.

820. COROLLARIO V. *I triangoli* MTO, RLO (Fig. 512.), *formati da due tangenti* MT, LR *cogli assintoti, hanno i lati intorno all'angolo comune* O *reciprochi fra loro.*

Noi abbiam ritrovato (*N.* 819.) NV, ovvero PO . ZS, od OX : : SX, od OZ. PN, ovvero VO, cioè PO . OX : : OZ . OV; onde raddoppiando tutt' i termini, avremo MO . OR : : OL . OT.

821. DIFFINIZIONE. Se descritte due iperbole opposte co' loro assintoti Yy, Tt (*Fig.* 513.) pigliasi 'l second' asse CD delle stesse pel primo dell' altre due MCm, NDn, ch' avranno i loro vertici in C e D, e 'l cui secondo asse sarà il primo AB, queste due nuove iperbole si chiameranno conjugate delle due opposte.

822. PROPOSIZIONE CLXVII. *L' iperbole conjugate hanno gli stessi assintoti dell' opposte* (Fig. 513.).

Da' vertici A, B dell' iperbole opposte e fra gli assintoti io conduco le tangenti HL, RS, parallele ed uguali ciascuna al second' asse

affe CD di quest'iperbole (*N*.781.), e divise in oltre ciascuna per mezzo in A e B, ficcome CD lo è in O; quindi giugnendo le loro estremità colle rette HR, LS, dette linee faran parallele ed uguali ciascuna al primo affe AO dell' iperbole opposte, e divise per mezzo in C e D dall'estremità di CD: ora CD è 'l primo affe dell'iperbole conjugate, AB il secondo, e le rette HR, SL, che passano pel vertice delle stesse, sono uguali e parallele ad AB, e in oltre son divise per mezzo in C e D, ficcome AB lo è in O; onde, se dal centro O tiransi Y*y*, T*t*, che passano per l'estremità R, L, S, H di dette linee, le rette Y*y*, T*t* saranno gli assintoti delle conjugate (*N*.801.) ∴ ma elle son pure gli assintoti dell'opposte, perchè passano per l' estremità delle rette RS, HL ∴ dunque, ec.

823. COROLLARIO I°. *La potenza dell' iperbole conjugato è la stessa che quella dell' opposte.*

Tiro le linee AG, CB, BD, DA. Queste saranno fra loro uguali, a motivo de' termini A, B dell' affe AB equidistanti da' termini C, D dell'affe CD, e saranno in oltre divise ciascuna per mezzo dagli assintoti, e BV sarà uguale a VD : ora $\overline{BV}^2$ è la potenza dell'iperbole opposte (*N.* 812.), e $\overline{DV}^2$ quella delle conjugate ∴ dunque, ec.

824. COROLLARIO II. *Circa l' iperbole conjugate non dicasi nè più nè meno di quello s' è detto circa l' opposte.*

Ciò non ha bisogno di dimostrazione.

825. AVVERTIMENTO. Quindi chiaramente si scorge, onde avvenga, che nell'iperbola la proprietà dell' ordinate al secondo affe non è la stessa che quella dell'ordinate al primo; imperocch'egli s' è già veduto, che 'l quadro d'un'ordinata F*f* al primo affe AB è al rettangolo FB × AF, o al quadrato $\overline{OF}^2$ della sua distanza al centro, meno il quadro $\overline{OB}^2$ del primo semiaffe, come il quadrato del secondo affe CD è a quello del primo AB (*N.* 770.), e ch' all' opposto, il quadro $\overline{fm}^2$ d' un' ordinata al secondo affe CD è al quadrato della sua distanza MO al centro, più 'l quadro $\overline{OD}^2$ del secondo semiaffe, come il quadrato del primo affe AB è a quello del secondo (*N.* 773.) ; il ch'è ben diverso. Ma s' egli si restituisce quest' ordinata *fm* nel suo vero sito, cioè nell' iperbola

bola conjugata, prolungando Ff fin che tagli la conjugata in N, e poscia tirando l'ordinata Nd, che sarà uguale ad fm, troveremo, che 'l quadro di detta ordinata è al rettangolo $dD \times CD$, ovvero a $\overline{Od}$ — OD, come $\overline{BA}$ a $\overline{CD}$; e per conseguente la proprietà dell' ordinata Nd al second' asse CD dell' iperbola PBQ sarà simile alla proprietà dell' ordinata Ff al primo asse della stessa.

826. COROLLARIO III. *Tutt' i primi diametri dell' iperbole opposte* PBQ, ZAX (Fig. 514.) *sono secondi diametri delle conjugate, e tutt' i primi diametri dell' iperbole conjugate sono secondi diametri dell' opposte.*

Già s'è detto, ch' i primi diametri d'un'iperbola son quei, che la segano, e i secondi quelli, che non la segano, e che tanto gli uni quanto gli altri passar debbono pel centro O. Ciò posto, qualunque diametro Vu dell'iperbole opposte passar dee per gli angoli YOT, tOI degli assintoti, ch' abbracciano quest' iperbole, perchè altrimenti è manifesto, ch'ei non le segherebbe; onde questo diametro non passa gli angoli TOY, IOt, ch'abbracciano l' iperbole conjugate, ed in conseguenza non li sega; però Vu è un secondo diametro dell' iperbole conjugate. Si proverà nello stesso modo, la retta Ff, la qual'è un primo diametro delle conjugate, essere un secondo dell'opposte.

827. COROLLARIO IV. *Se dall' estremità d' un primo diametro* Vu (Fig. 514.) *di due iperbole opposte, o di due iperbole conjugate tiransi delle tangenti* Yb, In, *che terminino agli assintoti, dette due tangenti son' uguali.*

Tiro l'ordinate ux, VD al primo asse, e a motivo di $uO = VO$ (*N. 776.*) i triangoli simili uOx, VOd son perfettamente uguali, ed $xO = dO$: ora, per ritrovare i punti g, G, in cui le tangenti segano'l primo asse, convien fare ∴ : xO. BO. Og, e :: dO. AO. OG; e in queste due proporzioni i primi due termini xO, BO d'una parte son' uguali ciascuno a ciascuno ai primi due dO, AO dell'altra; onde il terzo Og è uguale al terzo OG: così i due triangoli gOu, GOV son' uguali, perchè hanno i lati gO, Ou uguali ciascuno a ciascuno a' lati GO, OV, e l'angolo compreso gOu uguale all'angolo compreso GOV, per essere questi due angoli opposti al vertice; dunque $ug = VG$: parimente, uguali essendo i triangoli simili gbO, GnO a motivo di $gO = GO$, noi abbiamo $gb = Gn$; quindi $ug + gb = VG + Gn$, ovvero $ub = Vn$. Ma $Yb = 2ub$ (*N. 818.*), ed $In = 2Vn$; però $Yb = In$, e a cagione de' triangoli uguali e simili gOu, GOV,

l' angolo gnO equivale al suo alterno GVO, e le tangenti son parallele.

Si proverà nella stessa guisa, che le tangenti condotte all' estremità d' un primo diametro dell' iperbole conjugate e terminate fra gli assintoti son' uguali, e parallele.

828. PROPOSIZIONE CLXVIII. *Dato un primo diametro* VP *dell' iperbole opposte* (Fig. 515.) *colle sue due tangenti* YN, IG *terminate agli assintoti, dico; che se dall' uno de' punti del contatto* P *tiransi due rette* PS, PX *parallele agli assintoti, e che termino all' iperbole conjugate, ognuna d' esse sarà divisa per mezzo dagli assintoti ne' punti* H, E.

Nell' iperbola B il rettangolo PH × HO equivale alla sua potenza (*N.* 812.), e per la stessa ragione, nell' iperbola C il rettangolo SH × HO è uguale alla sua: ora le potenze di queste due iperbole son' uguali (*N.* 823.); dunque PH × HO = SH × HO; ed in conseguenza, a motivo dell' altezza comune HO, noi avremo PH = SH.

Si dimostrerà nella stessa guisa, che PX è divisa per mezzo in E.

829. COROLLARIO I°. *Poste le medesime cose, se dal punto* S *pel centro tirasi 'l diametro* SX, *ei sarà uguale e parallelo all' una, o all' altra delle tangenti* YN, IG *del diametro* PV.

A motivo della tangente YN divisa per mezzo in P (*N.*818.), e di PH parallela ad ON, noi abbiamo nel triangolo YON la base ON doppia di HP, siccome YN lo è d'YP: ora HS = HP (*N.* 828.); dunque SP = 2HP = ON; e per conseguente, a motivo di SP parallela ad ON, noi avremo SO uguale e parallela a PN, e 'l doppio di SO, cioè 'l diametro SX uguale al doppio di PN, cioè alla tangente YN.

NOTA. Qualunque tangente YN, compresa fra gli assintoti, è uguale e parallela al diametro conjugato SX del suo diametro PV.

830. COROLLARIO II. *Poste ancora le medesime cose, se dall' estremità delle tangenti* YN, IG *tiransi le rette* YG, NI, *ciascuna di loro sarà uguale e parallela al diametro* VP, *e toccherà l' iperbole conjugate all' estremità* S, X *del diametro* SX.

Ognuna d' esse sarà uguale e parallela al diametro VP; poichè le tangenti YN, GI son parallele ed uguali fra loro e al diametro SX, e perchè in oltre il diametro VP divide per mezzo queste tangenti, e 'l diametro. Dall' altra parte, le stesse rette YG, NI saranno tangenti in S ed X;

poi-

poichè passeranno per detti punti, e perchè saran divise in due parti uguali, per essere il diametro SX equidistante dalle due tangenti YN, IG: ora non possono dette linee esser segate per mezzo in S ed X, quando non sieno tangenti in essi punti; perocchè, se segassero l'iperbole in due punti, ciascuna di loro avrebbe una parte entro le curve, e due, fra la curva e gli assintoti, uguali fra se, ciò che impedirebbe, che l'una delle parti comprese fra la curva e gli assintoti fosse uguale all'altre due; onde necessariamente queste rette YG, NI esser debbono tangenti in S, ed X.

831. DIFFINIZIONE. Due diametri VP, SX (*Fig.* 515.) diconsi *Diametri conjugati*, quando sono reciprocamente paralleli alle lor tangenti, cioè quando 'l diametro VP è parallelo alle tangenti YG, NI del diametro SX, e 'l diametro SX alle tangenti YN, IG del diametro PV.

832. COROLLARIO III. *Il parallelogrammo di due diametri conjugati qualunque* VP, SX (Fig. 516.), *cioè 'l parallelogrammo* YNIG, *formato dalle lor tangenti, equivale al rettangolo de' due assi, cioè al rettangolo* HTRQ *formato dalle tangenti di detti assi.*

Il triangolo ONY, formato dalla tangente YN del diametro PV cogli assintoti, equivale al triangolo QOR formato cogli stessi assintoti dalla tangente QR dell'asse AB (*N.* 819.): ora 'l triangolo ONY è 'l quarto del parallelogrammo YNIG, e 'l triangolo QOR è 'l quarto del rettangolo HTRQ; dunque 'l parallelogrammo e 'l rettangolo son' uguali.

833. COROLLARIO IV. *Tutt' i parallelogrammi de' diametri conjugati sono fra loro uguali.*

Ciascun d'essi equivale al rettangolo degli assi. Dunque, ec.

834. COROLLARIO V. *La differenza de' quadri di due diametri conjugati qualunque equivale alla differenza dei quadri de' due assi dell' iperbola.*

Sia un semidiametro qualunque OR (*Fig.* 517.), il primo semiasse OB, e la tangente PQ al vertice B, ch' equivale al secondo asse (*N.* 801.); così QB sarà la metà di questo second' asse. Conduco in R la tangente YN uguale al diametro conjugato del semidiametro RO (*N.* 829.); e quindi YR è la metà di esso diametro conjugato. Da' punti R, B, P, N tiro delle rette RS, BV, PM, NH perpendicolari all' assintoto OY. Però il quadro di OR equivale al quadrato di OS, più quello di RS, a motivo del trian-

golo rettangolo OSR; e per la stessa ragione il quadro d'YR equivale al quadrato d'YS, più quello di SR; e d'ambe le parti togliendo 'l quadrato di SR, la differenza dei quadri de' semidiametri conjugati OR, YR sarà la stessa di quella de'quadri $\overline{SO}^2$, $\overline{YS}^2$: ora, a cagione d'YN divisa per mezzo in R (*N.* 818.), e di SR parallela ad NH, noi abbiamo $YS = SH$; dunque la differenza de'quadri $\overline{SO}^2$, $\overline{YS}^2$ è simile a quella de'quadrati $\overline{SO}^2$, $\overline{SH}^2$: ma $\overline{SO}^2 = \overline{OH}^2 + 2OH \times SH + \overline{SH}^2$ (*N.* 140.); onde la differenza de'quadri $\overline{SO}^2$, $\overline{SH}^2$ è $\overline{OH}^2 + 2SH \times OH$, ovvero $\overline{OH}^2 + YH \times OH$, o finalmente $YO \times OH$; e questa differenza è la stessa di quella dei quadri de'semidiametri conjugati $\overline{OR}^2$, $\overline{YR}^2$.

Così pure, noi abbiamo $\overline{OB}^2 = \overline{OV}^2 + \overline{VB}^2$, a cagione del triangolo rettangolo OVB, e $\overline{QB}^2 = \overline{QV}^2 + \overline{VB}^2$, a cagione del triangolo rettangolo QVB; e d'amendue le parti sottraendo il quadro $\overline{VB}^2$, la differenza de' quadrati $\overline{OB}^2$, $\overline{QB}^2$ del primo asse e del secondo semiasse sarà la stessa di quella de' quadrati $\overline{QV}^2$, $\overline{VO}^2$: ora, a motivo di QP divisa per mezzo in B, e delle parallele BV, PM, noi abbiamo $QV = VM$; dunque la differenza de' quadrati $\overline{QV}^2$, $\overline{VO}^2$ è la stessa di quella de'quadri $\overline{VM}^2$, $\overline{VO}^2$: ma $\overline{VO}^2 = \overline{MO}^2 + 2VM \times MO + \overline{VM}^2$; però la differenza de' quadri $\overline{VM}^2$, $\overline{VO}^2$ è $2VM \times MO + \overline{MO}^2$, ovvero $MQ \times MO + \overline{MO}^2$, o finalmente $OQ \times MO$; e questa differenza è simile a quella dei quadrati $\overline{OB}^2$, $\overline{BQ}^2$ dei due semiassi.

Quindi egli ci resta a far vedere, che la differenza $YO \times OH$ dei quadri $\overline{OR}^2$, $\overline{RY}^2$ de'due semidiametri conjugati equivale alla differenza $OQ \times MO$ de' quadri $\overline{OB}^2$, $\overline{BQ}^2$ de' semiassi. I triangoli simili OHN, OMP ci danno $OH . HN :: OM . MP$; onde moltiplicando i primi due termini per OY, e gli altri due per QO, avremo $OH \times OY . HN \times OY :: QO \times OM . QO \times MP$, ovvero $OH \times OY . QO \times OM :: HN \times OY . QO \times MP$:

ora

ora HN × OY è 'l doppio del triangolo YON, per essere HN la perpendicolare tirata dal suo vertice N sopra la base OY; e perciò anche QO × MP è 'l doppio del triangolo QOP, e questi due triangoli son nella stessa ragione de' loro doppj; dunque OH × OY. QO × OM : : YON. QOP: ma YON = QOP (*N.* 819.); onde OH × OY = QO × OM, cioè la differenza dei quadri $\overline{OR}^2$, $\overline{RY}^2$ de' due semidiametri conjugati è la medesima di quella de' quadri $\overline{OB}^2$, $\overline{QB}^2$ de' due semiassi; e però la differenza dei quadri de' diametri conjugati è simile a quella de' quadri de' due assi.

835. PROPOSIZIONE CLXIX. *Il quadro di qualsivoglia ordinata* RS *ad un diametro* VP (Fig. 518.) *è al rettangolo* PS × SV *della sua assissa pel diametro prolungato fino all' ordinata, come il quadro del diametro* EF *conjugato del diametro* VP *è al quadro del diametro* VP.

Al vertice P del diametro VP tiro gli assintoti e la tangente HL uguale al diametro EF (*N.* 829.), ed' ambe le parti prolungo l' ordinata RS fino agli assintoti in M ed N. I triangoli simili MSO, HPO ci danno MS. HP : : SO. PO; dunque $\overline{MS}^2$. $\overline{HP}^2$: : $\overline{SO}^2$. $\overline{PO}^2$, ed $\overline{MS}^2$ — $\overline{HP}^2$. $\overline{HP}^2$: : $\overline{SO}^2$ — $\overline{PO}^2$. $\overline{PO}^2$.

Ora, a motivo di $\overline{HP}^2$ = MR × RN (*N.* 817.), noi abbiamo $\overline{MS}^2$ — $\overline{HP}^2$ = $\overline{MS}^2$ — MR × RN, e a motivo di MN diviso in due parti uguali in S e disuguali in R, abbiamo $\overline{MS}^2$ — MR × RN = $\overline{RS}^2$; quindi $\overline{RS}^2$. $\overline{HP}^2$: : $\overline{SO}^2$ — $\overline{PO}^2$. $\overline{PO}^2$, ovvero $\overline{RS}^2$. $\overline{SO}^2$ — $\overline{PO}^2$: : $\overline{HP}^2$. $\overline{PO}^2$. Ma $\overline{SO}^2$ — $\overline{PO}^2$ = SP × SV (*N.*148.); onde $\overline{RS}^2$. SP × SV : : $\overline{HP}^2$, ovvero $\overline{EO}^2$. $\overline{PO}^2$: : $\overline{EF}^2$. $\overline{VP}^2$.

836. COROLLARIO I°. *Il quadro d' un' ordinata* RL *al diametro* EF *conjugato del primo* PV *è al quadro* $\overline{LO}^2$ *più l' quadrato* $\overline{EO}^2$, *come il quadro del diametro* PV *è a quello del diametro* EF.

Ciò si dimostra nella stessa maniera che s'è fatto rispetto all' ordinate al second' asse (*N.* 773.).

837. DIFFINIZIONE. Dati due diametri conjugati PV, EF (*Fig.* 518.), la terza proporzionale al primo e secondo si è 'l *para-*

ra-

rametro del primo, e la terza proporzionale al secondo e primo si è'l *parametro* del secondo.

838. COROLLARIO II. *Il quadro d'un'ordinata* RS *ad un primo diametro* VP *è al rettangolo* SP × SV, *come'l parametro di esso diametro è al diametro stesso; e'l quadro d'un'ordinata* RL *al secondo diametro* EF *conjugato di* VP *è al quadro* $\overline{LO}^2$, *più'l quadro* $\overline{EO}^2$, *come il parametro di questo secondo diametro è allo stesso secondo diametro.*

Ciò si dimostra nella stessa maniera che s'è fatto rispetto ai due assi (*N.* 771. 774.).

839. PROPOSIZIONE CLXX. *Dato un primo diametro* PV (Fig. 519.) *colle sue tangenti* PX, VL *e col suo diametro conjugato* EF, *se da qualsivoglia punto preso sopra la curva tirasi un' ordinata* MR *al diametro* PV, *e una tangente* MX, *che segherà le tangenti* LV, PX *e'l diametro conjugato* EF, *dico* 1°. *Che la retta* PR, *cioè'l diametro* VP *prolungato fino all' ordinata è diviso armonicamente ne' punti* P, S, V. 2°. *Che'l rettangolo* MR × OH *dell' ordinata* MR *per la parte* OH *del diametro conjugato segato dalla tangente* MX *equivale al quadro* $\overline{OF}^2$ *della metà dell' asse conjugato* EF. 3°. *Che'l rettangolo* LV × PX *delle parti* LV, PX *delle tangenti del diametro* PV *segato dalla tangente* MX *è altresì uguale al quadro* $\overline{OF}^2$ *della metà dell' asse conjugato.*

A motivo dell'ordinata MR condotta dal punto del contatto M noi abbiamo OR. OV : : OV. OS : ora la linea OP aggiunta alla retta OR è uguale alla media proporzionale OV; dunque RV. VS : : RP. PS (*N.* 753.); il che dovea 1°. dimostrarsi.

Convien' osservare, che si ha pure RV. RS : : RO. RP, siccome fu avvertito nel luogo testè citato (*N.* 753.).

I triangoli simili MSR, HSO ci danno SR. SO : : MR. OH; e moltiplicando i primi due termini per OR e gli altri due per MR, avremo SR × OR. SO × OR : : $\overline{MR}^2$. OH × MR : ora, a motivo di RV. RS : : RO. RP, abbiamo SR × OR = RV × RP, e a cagione di : : OR. OV. OS, abbiamo OR × OS = $\overline{OV}^2$; dunque RV × RP. $\overline{OV}^2$: : $\overline{MR}^2$. OH × MR. od $\overline{MR}^2$. RV × RP : : OH × MR. $\overline{OV}^2$: ma per la proprietà dell'iperbo-

la

la, $\overline{MR}^2$. RV × RP :: $\overline{OF}^2$. $\overline{OV}^2$ (*N.*835.) ; onde OH × MR. $\overline{OV}^2$: : $\overline{OF}^2$. $\overline{OV}^2$, ed in conseguenza OH × MR = $\overline{OF}^2$; il che dovea 2°. dimostrarsi.

A cagione di : : OR. OV. OS, noi abbiamo $\overline{OR}^2$ — OV . OV : : OV — OS. OS, cioè RV . SV : : OV, ovvero OP . OS ; dunque RV + SV . SV : : OP + OS . OS, cioè SR . SV : : PS . OS : ora, per i triangoli simili MSR, LSV, abbiamo SR. SV : : MR. LV, e per i triangoli simili PSX, OSH, abbiamo PS. OS : : PX. OH; onde MR. LV : : PX. OH, e quind'io deduco MR × OH = LV × PX: ma MR × OH = $\overline{OF}^2$; però anche LV × PX = $\overline{OF}^2$; il che dovea 3°.dimostrarsi.

840. PROPOSIZIONE CLXXI. *Se data una tangente* TPM (Fig. 520.) *intorno'l primo asse* AB *descrivesi un circolo* ARBH, *e che da' punti* R, H, *in cui la tangente* TM *sega il circolo*, *s' alzino sopra detta tangente delle perpendicolari* IZ, HX, *elle passeranno per i fuochi* X, Z *dell' iperbole opposte*.

Le parti IR, LH delle perpendicolari IZ, HX son due corde del circolo uguali, e perciò equidistanti dal centro O (*N.* 265.); quindi è, che se dal detto centro io tiro la retta FV perpendicolare ad esse corde, avrò FO = OV: così, simili essendo ed uguali i triangoli rettangoli OVX, OFZ, ho FZ = VX; e da una parte togliendo FR metà della corda IR, e dall' altra VL metà della corda HL, si ha RZ = LX. Ciò posto.

Tiro in A e B le tangenti AM, BN, che seghino in M ed N la tangente TM. I triangoli rettangoli PHX, PAM son simili, a motivo dell'angolo acuto HPX, ch'è loro comune; dunque PH. HX : : PA. AM. Similmente, a motivo de'triangoli simili PRZ, PBN, abbiamo PR. RZ : : PB. BN; però moltiplicando insieme queste due proporzioni, si ha PH × PR . HX × RZ : : PA × PB. AM × BN: ma segandosi le corde AB, RH in P, abbiamo PH × PR = PA × PB (*N.* 279.) ; quindi HX × RZ = AM × BN: ora AM × BN = $\overline{OD}^2$ (*N.* 839.) ; onde HX × RZ = $\overline{OD}^2$, e poichè RZ = XL, avremo HX × LX = $\overline{OD}^2$: ma XH, XB, essendo secanti del circolo, ci danno XA × XB = HX × XL (*N.* 273.) ; dunque XA × XB = $\overline{OD}^2$, e però

il

il punto X è l'uno de'fuochi (*N.* 784.) : così pure, a cagione di $IZ = HX$, e di $RZ = XL$, avremo $IZ \times ZR = HX \times LX = \overline{OD}^2$: ora le secanti ZI, ZA ci danno $ZB \times ZA = IZ \times ZR$; onde $ZB \times ZA = \overline{OD}^2$, e in conseguenza il punto Z è l' altro fuoco (*N.* 784.) .

841. COROLLARIO I°. *Se da qualsivoglia punto* T *preso sopra l'una dell' iperbole opposte* (Fig. 521.) *tirasi una tangente* TM *e delle rette* TZ, TX *ai due fuochi*, *gli angoli* ZTM, XTM, *formati da queste due rette e dalla tangente* TM, *son' uguali*.

Tiro l'ordinata TS al primo asse, e l'ordinata PE nel circolo: così, a motivo di SO, BO ∵ : BO. PO (*N.* 777.), la tangente SE al circolo tirata dal punto S toccherà in E (*N.*292.); e siccome TS è perpendicolare ad AS in S, e la retta TH, che parte dall'uno de'punti di TS, passa pel punto P, in cui l'ordinata EP del circolo condotta dal punto del contatto sega'l diametro AB di detto circolo, n'avviene, esser la stessa TH divis'armonicamente in R, P (*N.* 302.) ; e noi abbiamo TR. RP : : TH. PH, ovvero TR. TH : ∵ RP. PH: ma da' punti R, H tirando le perpendicolari IZ, XH a TH, i triangoli simili PRZ, PHX ci danno RP. PH :∵ RZ. HX; dunque TR. TH :: RZ. HX; donde ne segue, che i due triangoli rettangoli TRZ, THX son simili, perchè hanno i lati TR, RZ intorno l'angolo retto nel primo proporzionali a'lati TH, HX intorno l'angolo retto nel secondo, e per conseguenza l'angolo ZTR equivale all'angolo XTH.

842. COROLLARIO II. *Poste le stesse cose*, *la differenza delle linee* XT, TZ, *tirate da' due fuochi al punto del contatto* T, *è uguale al primo asse* BA.

Dal centro O al punto R conduco la retta OR, ch'è in conseguenza uguale alla metà del primo asse AB: ora, a cagione degli angoli uguali XTR, ZTR (*N.* 841.) e della retta TR perpendicolare per la costruzione a ZI, uguali sono i triangoli rettangoli FTR, ZTR, che han l'altezza comune TR, e noi abbiamo $FR = RZ$, e $TZ = TF$; così XF è la differenza delle due linee XT, TZ tirate dal punto T ai fuochi: ma a motivo d'XZ diviso per mezzo in O, e di FZ diviso per mezzo in R, i triangoli simili ZFX, ZRO ci danno FX doppio di RO; dunque $FR = 2RO = AB$.

843. PROPOSIZIONE CLXXII. *Il minore di tutt' i primi diametri d' una*, *o due iperbole opposte* (Fig. 522.), *tirate da una stessa*

stessa parte BS *dell'una dell'iperbole, si è'l primo asse* AB , *e gli altri son tanto maggiori, quanto più da esso s'allontanano. Così ancora, il minore di tutt'i secondi diametri è'l secondo asse* CD, *e gli altri sono tanto maggiori, quanto più s'allontanan dal medesimo.*

Nell'iperbola B tiro più ordinate TM, SN al primo asse, e da' loro termini T, S conduco de' diametri TP, SR. Nel triangolo rettangolo OTM noi abbiamo $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{TM}$, e'l triangolo rettangolo OSN ci dà $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{SN}$: ora $\overrightarrow{ON}$ è maggiore di $\overrightarrow{OM}$, per essere l'ordinata SN più distante dal centro O che l'ordinata TM, e per la stessa ragione anche $\overrightarrow{SN}$ è maggior di $\overrightarrow{TM}$; dunque $\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{SN}$ è maggiore di $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{TM}$, quindi $\overrightarrow{OS}$ è maggior di $\overrightarrow{OT}$, ed OS di OT: così 2OS, od SR è maggiore di 2OT, ovvero TP; cioè'l diametro SR, ch'è più distante dal primo asse, o che con esso forma un'angolo maggiore, è più grande del diametro TP, il quale col medesimo primo asse forma un angolo minore; ed è manifesto, che AB esser dee il minore di tutt'i primi diametri; perocch' essendo il vertice B dell'iperbola più vicino al centro O che tutti gli altri punti della curva, la retta OB è più corta della linea OT, e per conseguente AB è minor di TP.

Lo stesso noi proveremo rispetto a'secondi diametri CD, LV, QX, descrivendo l'iperbole conjugate.

844. PROPOSIZIONE CLXXIII. *Se dal centro* O (*Fig.* 523.) *con un raggio* OH *maggior del primo semiasse* OB *descrivesi un circolo* HMPRTV, *la circonferenza di detto circolo non segherà l'iperbola ch'in quattro punti* M, R, T, V; *e se gli stessi si congiungono colle rette* MR, RT, TV, VM, *due di esse* TR, VM *saran delle doppie ordinate al primo asse fra loro uguali, e l'altre due* MR, TV *saranno delle doppie ordinate al secondo, altresì uguali fra loro.*

1°. Egli è per se evidente, che la circonferenza del circolo dee segar l'iperbola in quattro punti, non potendo l'estremità H del raggio OH descrivere il quarto di circonferenza HP senz'almeno segare la semiperbola BZ in un punto M; il che dee pur succedere rispetto all'altre semiperbole AR, AT, VB. 2°. Il punto H, descrivendo'l quarto della circonferenza HP, non può segar la semiperbola BZ ch'in un punto M; perocchè, se la segasse in due, ti-

tirando da essi due punti al centro O delle rette, le quali sarebbero uguali, per essere raggi dello stesso circolo, elle sarebbono ancora semidiametri dell'iperbola, e per conseguente i doppj di esse rette, cioè i due diametri sarebbero uguali; donde ne risulterebbe, che da un medesimo lato BMZ dell'iperbola si potrebbero tirare due diametri uguali, il ch'è impossibile (*N.* 843.). 3°. Dal punto M, in cui'l quarto di circolo HP sega la semiperbola, tiro nel circolo una corda parallela al primo asse; detta corda sarà dunque perpendicolare al secondo, e sarà per conseguente divisa in due parti uguali in Q, perchè questo second'asse passa pel centro O: ora la doppia ordinata al second'asse, condotta dal punto M, è altresì divisa in due parti uguali in Q; però la corda del circolo e la doppia ordinata son'uguali, e per conseguenza il punto R, in cui la corda sega'l circolo, è'l medesimo di quello, in cui'l circolo taglia la semiperbola AR. Si proverà nello stesso modo, che la corda tirata da R parallela al secondo asse è uguale alla doppia ordinata TR condotta dal punto R al primo; che la corda tirata dal punto T parallela al primo asse equivale alla doppia ordinata TV al picciolo asse condotta dallo stesso punto, e finalmente, che la corda tirata dal punto V parallela al secondo asse è uguale alla doppia ordinata al primo condotta dal medesimo punto V; onde, a motivo delle parallele TV, RM, e TR, VM, le due doppie ordinate TR, VM al primo asse son'uguali, non meno che le due RM, TV al secondo.

845. PROPOSIZIONE CLXXIV. *Se sopra'l secondo semiasse* OD *prolungato se sia d'uopo* (Fig. 524.) *pigliasi la parte* OP *uguale al primo semiasse* OB, *e che quindi portisi la distanza* PB *sopra'l primo semiasse prolungato da* O *in* V, *l'ordinata* TV *condotta dal punto* V *al primo asse sarà uguale alla metà* CO, *ovvero* OD *del secondo.*

Nel triangolo rettangolo isoscele POB, noi abbiamo $\overline{PB}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OP}^2 = 2\overline{OB}^2$, e per conseguente $\overline{OV}^2 = 2\overline{OB}^2$: ora, per la proprietà della curva, $\overline{TV}^2 . VB \times VA$, ovvero $\overline{VO}^2 - \overline{OB}^2 :: \overline{CO}^2 . \overline{OB}^2$, ed $\overline{VO}^2 - \overline{OB}^2 = 2\overline{OB}^2 - \overline{OB}^2 = \overline{OB}^2$; dunque $\overline{TV}^2 . \overline{OB}^2 :: \overline{CO}^2 . \overline{OB}^2$, e però $\overline{TV}^2 = \overline{CO}^2$, e TV = CO.

846. PROBLEMA. *Data un'iperbola* XBZ (Fig. 525.) *trovare i suoi due assi, i suoi fuochi, ed i suoi assintoti, ec.*

Tiro

Tiro più linee parallele MB, NR, ec. terminate d'ambe le parti alla curva; le divido ciascuna in due parti uguali, e per i punti di divisione faccio passare una retta TL, ch'è un diametro. Cerco nello stesso modo un'altro diametro HV, e'l punto O, in cui li due diametri si segano, è'l centro dell'iperbola.

Facendo centro in O, con un'apertura di compasso assai grande, a fine di poter segare l'iperbola, descrivo un'arco di circolo, e da' punti E, I, in cui quest'arco sega la curva, tiro la retta EI doppia ordinata al primo asse (*N.* 844.); onde segando detta linea per mezzo in G, dal centro O tiro la retta OG, che sega l'iperbola in B, e per conseguenza la retta OB è la metà del primo asse. Alzo in O la retta OS uguale e perpendicolare ad OB; prendo la distanza SB, e da O portandola in G, l'ordinata GI condotta dal punto G equivale alla metà OD del secondo (*N.*845.).

Portata dunque GI da O in D, e da O in C perpendicolare a CD, per avere la posizione del secondo asse CD, tiro le rette CB, DB; e dividendole ciascuna per mezzo ne' punti *m*, *n*, dal centro O, e da'punti di divisione *m*, *n* tiro le rette indefinite O*m*L, O*nl*, che sono gli assintoti ricercati (*N.* 802.).

Finalmente, prendendo CB, ovvero DB, e portandola sopra l'asse prolungato d'ambe le parti da O in X, e da O in *x*, i punti X, *x* sono i due fuochi (*N.* 783.).

847. PROBLEMA. *Data una, o due iperbole opposte* (Fig.526.) *trovare un primo diametro, che colle sue ordinate formi un' angolo uguale a un dato* abc.

Tiro gli assintoti OT, OV; descrivo con un raggio ad arbitrio un circolo MNL, e da qualsivoglia punto M tirando una tangente MZ a detto circolo, faccio in M colla tangente MZ un'angolo ZML uguale all'angolo TOV degli assintoti: così ZML è l'angolo del segmento MIL. Sego per mezzo in X la corda ML, e nell'altro segmento io faccio un'angolo MXN uguale al dato *abc*. Tiro le corde MN, NL, e porto la prima MN sopra l'assintoto OT da O in E, e l'altra NL sopra l'assintoto OV da O in F; tiro la retta EF, e segandola per mezzo in R, dal centro O tiro la retta OR, e la sua parte OS, compresa fra 'l centro O dell' iperbola e la curva, sarà la metà del diametro cercato. Il che io provo in questo modo.

L'angolo del segmento ZML vale la metà dell'arco MIL: ora anche l'angolo MNL alla circonferenza vale la metà dello stesso arco; dunque MNL = ZML: ma ZML = EOF; onde MNL

 =EOF,

= EOF, e però i due triangoli MNL, EOF son'uguali, perchè hanno i lati MN, NL uguali ciascuno a ciascuno a'lati EO, OF, e l'angolo compreso MNL uguale all'angolo compreso EOF. Dunque l'angolo NML equivale all'angolo OEF, e 'l lato ML al lato EF; dal che ne segue, che $\frac{1}{2}$ML, od MX è uguale a $\frac{1}{2}$EF, od ER, e che per conseguenza i triangoli MXN, ERO son'uguali e simili, a motivo de'lati MN, MX uguali ciascuno a ciascuno a'lati EO, ER, e dell'angolo compreso NMX uguale all'angolo compreso OER; però l'angolo NXM equivale all'angolo ORE: ora, a cagione di EF diviso per mezzo in R, e di EP = HE (*N.* 815.), noi abbiamo PR = RH; onde la linea OR tirata dal centro O è un diametro, perchè sega PH in due parti uguali; e questo diametro colla sua doppia ordinata forma un'angolo ORP uguale all'angolo MXN, ch' equivale al richiesto *abc*.

848. PROBLEMA. *Dato un diametro, o semidiametro* OR (Fig. 527.) *trovar' il suo diametro conjugato.*

Tiro gli assintoti OX, OY, e la tangente PH al vertice R del dato diametro: ora questa tangente equivale al diametro conjugato, che si cerca (*N.* 829.); onde tirando dal centro O una parallela alla stessa, e facendo OT = RH, ed OL = PR, avremo la posizione di detto diametro.

849. PROPOSIZIONE CLXXV. *Se dal punto* T *preso sopra l'una dell'iperbole opposte* (Fig. 528.) *tirasi una retta* TP *all' altra iperbola, le parti* TS, RP *di essa retta, comprese fra le curve e gli assintoti, son' uguali.*

Da'punti T, P fra gli assintoti io conduco le rette MN, HL parallele al secondo asse CD. I triangoli simili MTR, LPR ci danno MT . TR : : LP . PR, e a cagione de' triangoli simili TNS, PHS noi abbiamo TN . TS : : PH . PS; onde moltiplicando insieme i termini di queste due proporzioni, avremo MT × TN . TR × TS : : LP × PH . PR × PS: ma MT × TN = LP × PH, poichè questi due rettangoli son'uguali al quadro della metà CD del second' asse (*N.* 805.); dunque TR × TS = PR × PS, e però TR . PR : : PS . TS; quindi componendo, TR + PR . PR : : PS + TS . TS, ovvero TP . PR : : TP . TS, ed in conseguenza PR = TS.

850. COROLLARIO I°. *Se fra due iperbole opposte* (Fig. 529.) *ti ansi più linee* TP, HL, ec. *parallele fra loro e al primo asse, o ad un primo diametro* EF, *i rettangoli* TS × SP, HZ × ZL *delle parti* TS, HZ *di queste stesse rette, comprese fra l'una delle curve e l'assin-*

l' assintoto più vicino, moltiplicate per i residui SP, ZL *di dette linee, sono uguali fra loro, e al quadro della metà* OE *del diametro a cui queste linee son parallele.*

Da' termini T, P, H, L delle linee TP, HL io tiro fra gli assintoti delle rette MN, *mn*, XV, *xu* parallele al secondo asse. I triangoli simili NTS, VHZ ci danno TN . TS : : HV . HZ, e a motivo de' triangoli simili MTR, XH*r* abbiamo MT . TR : : XH . H*r*; onde moltiplicando insieme queste due proporzioni, avremo TN × MT . TS × TR : : HV × XH . HZ × H*r*: ora TN × MT = HV × XH (*N.* 817.); dunque TS × TR = HZ × H*r*: ma a motivo di PR = ST e di L*r* = HZ (*N.* 849.), noi abbiamo TR = PS, ed LZ = H*r*; quindi TS × TR = TS × PS, ed HZ × H*r* = HZ × LZ, e perciò i rettangoli TS × PS, HZ × LZ sono fra loro uguali; e siccome quanto le linee TP, HL son più vicine al diametro EF, tanto più le lor parti Z*r*, RS, ec. comprese fra gli assintoti diminuiscono, così è manifesto, che svanendo questa parte s'avrà EO × OF = TS × PS = HZ × LZ.

851. COROLLARIO II. *Le rette* TP, HL *tirate parallele ad un primo diametro* EF *son divise ciascuna per mezzo dal diametro conjugato dello stesso.*

Il diametro conjugato di EF, cioè la retta *pq* è un primo diametro dell' iperbola conjugata G*g*, e l' ordinate G*g*, ec. di questo diametro son parallele al diametro EF, ed in conseguenza alle rette TP, ec. onde prolungando G*g* fino agli assintoti, la retta AB sarà ancora divisa per mezzo, siccome G*g* lo è dal suo diametro *pq*, e ciò a cagione di *a*G = *bg*: ora i triangoli O*ba*, ORS son simili, e 'l diametro *pq*, che passa pel loro vertice O, divide in mezzo la base *ba* del triangolo O*ba*; dunque lo stesso diametro sega pure per mezzo in *t* la base RS del triangolo ORS. Così ad R*t* sommando la parti RP, e alla retta RS la parte ST uguale ad RP, avremo T*t* = *t*P; e però la retta TP è divisa per mezzo in *t* dal diametro *pq* conjugato del diametro EF, e così dell'altre.

852. PROBLEMA. *Dati gli assintoti* YI, LV (Fig. 530.) *ed un punto* R *dell' una dell' iperbole opposte descrivere l' iperbola.*

Colla retta OS divido in due ugualmente l' angolo VOL degli assintoti, detta linea è nella posizione del primo asse. Dal dato punto R fino al concorso dell' assintoto LV in X tiro una retta RX parallela ad OS, e quindi la prolungo fin che XT sia uguale ad NR: così io ho RX + XT uguale al quadro della metà del primo asse (*N.* 850.), essendo manifesto, che T esser dee un

punto

punto dell' iperbola opposta a quella, che si cerca; e però prendendo una media proporzionale fra RX ed XT, e portandola sopra OS da O in B e da O in A, ho'l primo asse AB.

Dal dato punto R io conduco fra gli assintoti la retta HM perpendicolare al primo asse, ed ho HR × RM uguale al quadro della metà del secondo (*N.* 805.), dovendo questo secondo asse esser parallelo ad HM. Pigliando dunque una media proporzionale infra HR ed RM, e innalzandola perpendicolarmente dall' una e dall' altra parte del grand' asse al centro O, s' avrà il secondo asse CD; e così, ritrovati li due assi, si descriverà l' iperbola come sopra s' è insegnato.

Dopo trovato il primo asse AB si potrebbe ancora più agevolmente rinvenire il secondo CD, tirando dal vertice B la tangente PQ uguale al second'asse (*N.*801.); quindi è, che se pel mezzo O del primo asse AB tirasi una retta CD perpendicolare ad AB, e che sopra vi si pigli la parte OC uguale a PB, e la parte OD uguale a BQ, s'avrà il secondo asse CD nella sua posizione.

FINE DEL TOMO SECONDO.

TA-

TAVOLA
DE' CAPITOLI E DE' TITOLI
CONTENUTI IN QUESTO SECONDO VOLUME.

Continuazione del Libro Secondo.

ER.

ERRATA	CORRIGE.
Pag. 16. lin. 26. in cui dove	leg. dove
Pag. 19. lin. 24. correzioni	leg. le correzioni
Pag. 27. lin. 7. a parte	leg. parte
Pag. 61. lin. 24. può può	leg. non può
Pag. 72. lin. 13. egli	leg, ch' egli
Pag. 95. lin. 6. feſſi	leg. fra eſſi
Pag. 134. lin. 28. NS ;	leg. = NS ;
Pag. 142. lin. 15. farà	leg. avrà
Pag. 194. lin. 10. all' eſtremità	leg. eſtremità
Pag. 214. lin. 2. $\overline{OL}$	leg. $\overline{OL}$

B
A 3 B
C D
A 4 B
C D
G
F
B
H G
E F
D 8
A B
B 11
O C
D
B 12
A O C
R
D
S
A 15 B
R S
D
19
V
T S B
Q
A N M C
18 A
C
A
B C
A
B C
22
a
b c

25
A
B
H
D
E
26
A
C
M
B
H
D
E
30
X
Z
A
L
N
H
E
B
S
Q
M
D
B
L
33
A
P
S
O
R
Q
C
M
B
N
D
36
R
M
T
C
37
R
B
H
M
A
C
S
39
S
M
V
C
40
B
H
S
M
A
E
T
V
R
C
43
B
H
M
A
T
C
P
E
Q
44
P
E
Q
B
H
M
A
T
C

47
48
52
54
57
59
60
61
64
65
68
69
70

142
143
146
147
150
153
154
155
158
159
162
163

166 167 168

171 172 173

177

180 181

184 185

188 189

192
193
196
197
199
200

205
D
N
C
206
D
B
R
S
C
E
A
C
207
A
B
C
210
211
A
B
B
212
A
C
214
N R
E
S
I
II
III
IV
B
X
1 2 3 4 5 6

217

219

222

223

226

229

230

233
234
236
237
238
240
241
244
246
247
251
254

83
C
B
284
R
C
S
E
F
A
B
285
E
B
A
C
C
G
L
B
288
B
C
F
H
R
T
N
V
S
E
A
D
289
B
A
C
P
R
D
292
C
B
293
D
E
R
C
H
A
B
C
294
R
B
H
D
E
F
A
D
C
O
H
Q
L
B
296
V
T
M
R
H
F
P
G
14

299 300 303 304 307 310 313 314 315 316 320 321 322 325 326

15

329
330
331
335
338
342
342
343

347
348
352
351
353
354
357

360
362
363
368
369
370
373

377

C B D O A H E R 6 6 5 5 17 20 C T

D C 378 A B

381

E A D B C

382

B C

385
386
388
389
391
392
394
395

398

402

401

406

409

410

411

413

414

416

417

420
423
425
426
427
430
431
434
435

438
439
442
443
446
447
449
450
451

455
454
459
458
462
463
466
467

479 471 472

475 476

479 480

483 486

489

490

493

494

497

498

501

503

504

507

510

511

514
517
520
521

524
525
527
530